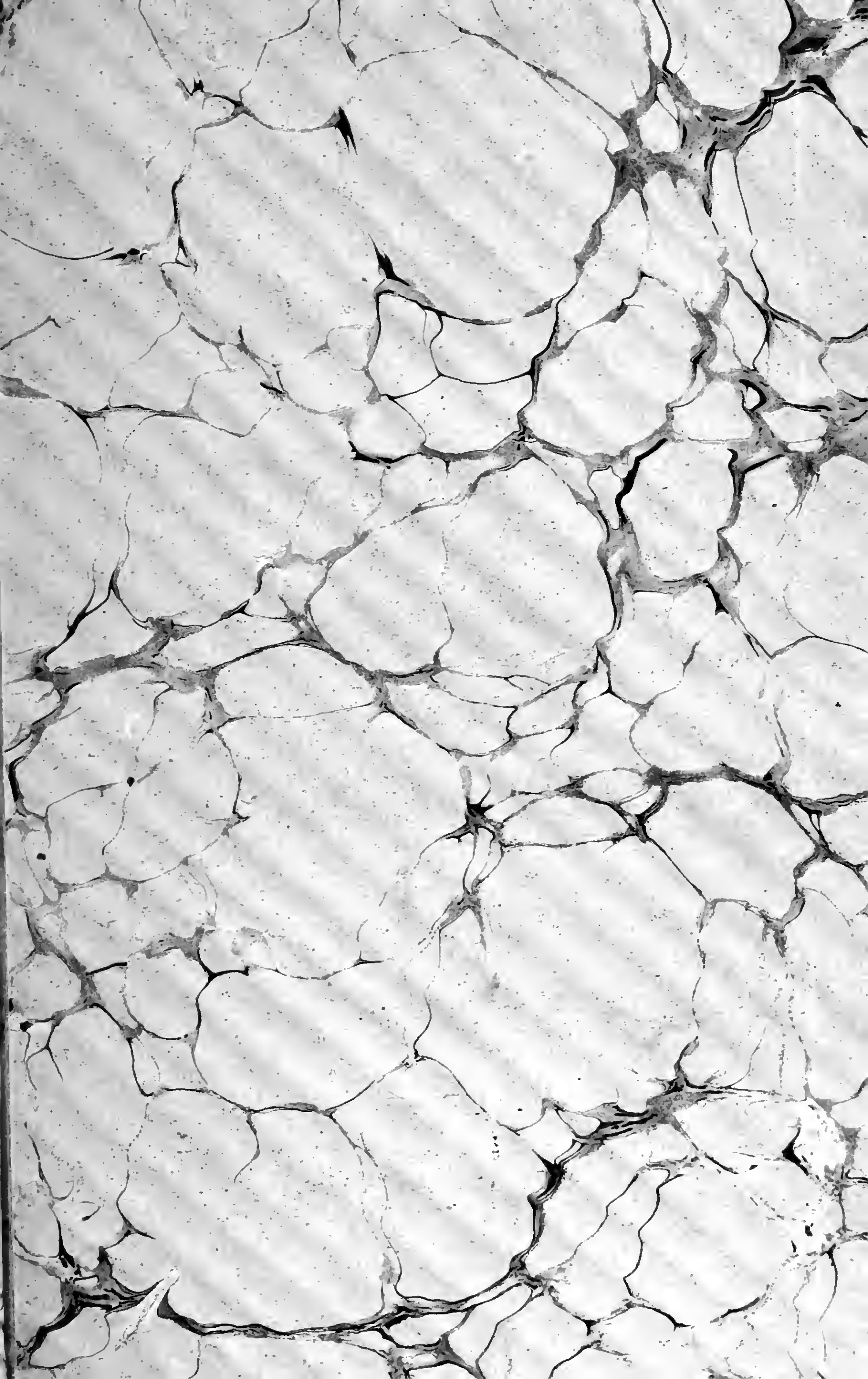


NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

1854.

LIBRAIRIE DE MALLET-BACHELIER.

Cet Ouvrage se trouve aussi

A ANGOULÊME. .	chez PEREZ-LECLER.
BORDEAUX. . .	— CHAUMAS.
BOURGES.	— VERMEIL.
BREST.	— Mme Vve LEFOURNIER.
LILLE.	— VANACKÈRE.
LORIENT.	— LEROUX-CASSART.
LYON	— SAVY.
	— BRUN et Cie.
MARSEILLE. . .	— Mme Vve CAMOIN.
METZ.	— WARION.
MONTPELLIER.	— SÉWALLE.
NANCY.	— G. GRIMBLOT et Cie.
NANTES.	— FOREST aîné.
ORLÉANS.	— GATINEAU.
RENNES	— VERDIER.
ROCHEFORT. . .	— A. GIRAUD.
	— PROUST-BRANDAY.
ROUEN.	— LEBRUMENT.
STRASBOURG. .	— TREUTTEL et WURTZ.
	— Mme LEVRAULT.
	— DERIVAUX.
TOULON.	— MONGE.
TOULOUSE. . . .	— Mlles GALLON sœurs.
	— PRIVAT.
	— GIMET.
LEIPSIG.	— MICHELSEN.
LONDRES. . . .	— BAILLIÈRE.
	— DULAU et Cie, Soho-Square.
MADRID.	— MONIER.
TURIN.	— BOCCA.
VIENNE.	— ROHRMANN

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, 12.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE;

RÉDIGÉ

Par M. Terquem,

Officier de l'Université, Docteur ès sciences, Professeur aux Écoles Impériales d'Artillerie, Officier de la Légion d'honneur,

ET

M. Gerono,

Professeur de Mathématiques.

TOME TREIZIÈME.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHIQUE, ETC.,

Quai des Augustins, n° 55.

1854.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

COORDONNÉES OBLIQUES;

D'APRÈS M. BALTZER,

Professeur au Gymnase de Dresde.

(Journal de M. Crelle, t. XLVI, p. 145; 1853.)

A. *Coordonnées obliques ; points et droites dans le plan.*

1. *Notations.* x, abscisse ; y, ordonnée ; r, distance du point (Q) à l'origine O ; xr, angle que fait la direction r avec x positif, l'angle étant compté suivant un sens déterminé ; de sorte que

$$\text{angle } rx + \text{angle } xr = 0, \quad \sin rx + \sin xr = 0,$$
$$\cos rx - \cos xr = 0.$$

2. THÉORÈME. *Dans un polygone fermé, un côté est égal à la somme algébrique des projections des autres côtés sur ce côté.* — Théorème fondamental qu'on doit, je crois, à Carnot.

3. D'après ce théorème et cette notation, l'on a

$$(1) \qquad r = x \cos xr + y \cos yr,$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} r \cos xr = x + y \cos xy, \\ r \cos yr = x \cos xy + y, \end{array} \right.$$

d'où l'on tire

$$(3)\qquad \frac{x + y\cos xy}{\cos xr} = \frac{x\cos xy + y}{\cos yr} = r,$$

$$(4)\qquad r^2 = x^2 + 2xy\cos xy + y^2,$$

$$(5)\qquad \frac{\cos xr - \cos yr\cos xy}{x} = \frac{\cos yr - \cos xr\cos xy}{y} = \frac{\sin^2 xy}{r},$$

$$(6)\qquad \sin^2 xy = \cos^2 xr - 2\cos xr\cos yr\cos xy + \cos^2 yr.$$

4. *Angles d'une droite avec les axes.* Le rapport $x:y$ est constant pour tous les points de la droite OQ; ainsi

$$\frac{x}{y} = \frac{f}{g},\quad gx - fy = 0,$$

est l'équation de la droite.

Nous désignons par (fg) la direction de la droite; si l'on a

$$\frac{r}{\rho} = \frac{x}{f} = \frac{y}{g},$$

alors, à cause de l'équation (4),

$$\rho^2 = f^2 + 2fg\cos xy + g^2,$$

et

$$\frac{f + g\cos xy}{\cos xr} = \frac{f\cos xy + g}{\cos yr} = \rho^2,$$

ce qui donne les angles xr, yr, que fait la droite avec les axes.

5. *Normale.* Soient $gx - fy = h$ l'équation d'une droite, $g'x - f'y = 0$ l'équation de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur la droite, et n la longueur de cette perpendiculaire. On a, d'après le théorème (2), x, y étant un point situé sur la droite donnée,

$$x\cos xn + y\cos yn = n;$$

équation qui doit être identique avec l'équation de la droite donnée, donc

$$\frac{g}{\cos xn} = \frac{-f}{\cos yn} = \frac{h}{n}, \quad \cos xn = \frac{ng}{h}, \quad \cos yn = \frac{-nf}{h};$$

l'équation (5), appliquée à la normale, donne

$$\frac{\cos xn - \cos yn \cos xy}{f'} = \frac{\cos yn - \cos xn \cos xy}{g'} = \frac{\sin^2 xy}{\rho'},$$

ou bien

$$\frac{g + f \cos xy}{f'} = -\frac{f + g \cos xy}{g'} = \frac{h}{n} \frac{\sin^2 xy}{\rho'},$$

ou

$$\rho'^2 = f'^2 + 2f' g' \cos xy + g'^2;$$

et l'équation (6) donne

$$\frac{h^2}{n^2} \sin^2 xy = g^2 + 2fg \cos xy + f^2 = \rho^2,$$

d'où

$$\frac{h}{n} = \frac{\rho}{\sin xy};$$

et réciproquement, les deux directions (fg) et $(f'g')$ sont normales l'une à l'autre, lorsque

$$gg' + ff' + (fg' + gf') \cos xy = 0.$$

6. *Angle de deux droites.* Soient les droites $gx - fy = 0$; $g'x - f'y = 0$; x, y un point de la première droite; x', y' un point de la seconde droite; $r^2 = x^2 + 2xy \cos xy + y^2$, $r'^2 = x'^2 + 2x'y' \cos xy + y'^2$; on a

$$r' \cos rr' = x' \cos xr + y' \cos yr \quad \text{(théorème 2)},$$

et, à l'aide de l'équation (3),

$$(7) \qquad rr' \cos rr' = x'x + y'y + (x'y + y'x) \cos xy;$$

ou bien, à l'aide de l'équation (5),

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 xy \cos rr' = \cos xr \cos xr' + \cos yr \cos yr' \\ - (\cos yr \cos yr' + \cos xr' \cos yr') \cos xy, \end{array} \right.$$

on a

$$\frac{f}{x}=\frac{g}{y}=\frac{\rho}{r},\quad \frac{f'}{x'}=\frac{g'}{y'}=\frac{\rho'}{r'};$$

ou

$$\rho^2=f^2+2fg\cos xy+g^2,\qquad \rho'^2=f'^2+2f'g'\cos xy+g'^2;$$

substituant, dans l'équation (7), on trouve

$$\rho\rho'\cos rr'=ff'+gg'+(fg'+gf')\cos xy.$$

On parvient au même résultat en substituant, dans l'équation (7), ayant égard aux équations (3),

$$\frac{f+g\cos xy}{\cos xr}=\frac{f\cos xy+y}{\cos yr}=\rho,$$

$$\frac{f'+g'\cos xy}{\cos x'r}=\frac{f'\cos xy+y'}{\cos y'r}=\rho';$$

faisant $rr'=\frac{\pi}{2}$, on revient à la formule des directions normales.

7. *Distance d'une droite à l'origine.* Soient l'équation de la droite $gx-fy=h$; n la distance de cette droite à l'origine; on a, comme ci-dessus (§ 5),

$$n=\frac{h\sin xy}{\rho}.$$

8. *Distance d'une droite à un point quelconque.* Soient la même droite et un point (x_1, y_1), et n_1 la distance cherchée; on trouve facilement

$$n_1=\frac{(h-gx_1-fy_1)\sin xy}{\rho}.$$

B. *Points, droites, plans dans l'espace.*

9. *Notation.*

$$\mathrm{OP}=x,\quad \mathrm{PQ}=y,\quad \mathrm{QR}=z,$$

coordonnées des points R; $\mathrm{OR}=r$.

10. On a

$$(1)\qquad r = x\cos xr + y\cos yr + z\cos zr,$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} r\cos xr &= x + y\cos xy + z\cos zx\\ r\cos yr &= x\cos xy + y + z\cos yz\\ r\cos zr &= x\cos zx + y\cos yz + z \end{aligned}\right\}\ [\text{théorème } 2\,];$$

de là

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x + y\cos xy + z\cos zx}{\cos xr}\\ &= \frac{x\cos xy + y + z\cos yz}{\cos yz}\\ &= \frac{x\cos zx + y\cos yz + z}{\cos zr} = r. \end{aligned}\right.$$

Les équations (1) et (2) donnent

$$(4)\quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy\cos xy + 2yz\cos yz + 2zx\cos zx.$$

On déduit, des équations (2),

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sin^2 yz\cos xr - \gamma\cos yr - \beta\cos zr}{x}\\ &= \frac{\sin^2 zx\cos yr - \alpha\cos zr - \gamma\cos xr}{y}\\ &= \frac{\sin^2 xy\cos zr - \beta\cos xr - \alpha\cos yr}{z} = \frac{\delta^2}{r}, \end{aligned}\right.$$

où

$$\alpha = \cos yz - \cos zx\cos yz,$$

$$\beta = \cos zx - \cos xy\cos yz,$$

$$\gamma = \cos xy - \cos yz\cos zx,$$

$$\delta^2 = 1 + 2\cos xy\cos yz\cos zx - \cos^2 xy - \cos^2 yz - \cos^2 zx.$$

Substituant pour x, y, z, r, leurs valeurs proportionnelles dans l'équation (1), on obtient

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^2 = {}&\sin^2 yz\cos^2 xr + \sin^2 zx\cos^2 yr + \sin^2 xy\cos^2 zr\\ &- 2\gamma\cos xr\cos yr - 2\beta\cos zr\cos xr - 2\alpha\cos yr\cos zr. \end{aligned}\right.$$

Dans le trièdre formé par les axes, soit

X l'angle dièdre opposé à yz,
Y l'angle dièdre opposé à zx,
Z l'angle dièdre opposé à xy,

on a (Trigonométrie sphérique)

$$(7)\qquad \begin{cases} \alpha = \sin zx \sin xy \cos X, \\ \beta = \sin xy \sin yz \cos Y, \\ \gamma = \sin yz \sin zx \cos Z; \end{cases}$$

$$(8)\qquad \begin{cases} \delta^2 = \sin^2 zx \sin^2 xy \sin^2 X, \\ \quad = \sin^2 xy \sin^2 yz \sin^2 Y, \\ \quad = \sin^2 yz \sin^2 zx \sin^2 Z, \\ \quad = 4 \sin \frac{1}{2}(xy + yz + zx) \sin \frac{1}{2}(xy + yz - zx) \\ \qquad \sin \frac{1}{2}(yz + zx - xy) \sin \frac{1}{2}(zx + xy - yz); \end{cases}$$

de là

$$\frac{\cot X}{\alpha} = \frac{\cot Y}{\beta} = \frac{\cot Z}{\gamma} = \frac{1}{\delta}.$$

11. *Volume du parallélipipède des axes.* Si l'on prend, à partir de l'origine, une longueur égale à l'unité sur les trois axes, et qu'on achève le parallélipipède, le volume est égal à δ; élevant à l'origine les droites x', y', z' respectivement perpendiculaires aux plans yz, zx, xy, on aura

$$(9)\qquad \delta = \sin xy \cos zz' = \sin yz \cos xx' = \sin zx \cos yy'.$$

12. Par le point R, menons un plan perpendiculaire à OR; soient K, L, M les points d'intersection de ce plan, avec les axes x, y, z : on a

$$\text{KLM} \cos xr = \text{OLM} \cos x'x, \text{ etc.};$$

d'où

$$(10)\qquad \text{OLM}.\frac{\cos x'x}{\cos xr} = \text{OMK}.\frac{\cos y'y}{\cos yr} = \text{OKL}.\frac{\cos z'z}{\cos zr} = \text{KLM},$$

et de là, au moyen de l'équation (9),

$$(11)\quad \frac{\text{OLM}}{\sin yz \cos xr} = \frac{\text{OMK}}{\sin zx \cos yr} = \frac{\text{OKL}}{\sin xy \cos zr} = \frac{\text{KLM}}{\delta}.$$

Cette équation, combinée avec les équations (6) et (7), donne

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{KLM}^2 = \text{OLM}^2 + \text{OMK}^2 + \text{OKL}^2 \\ -\, 2.\text{OLM}.\text{OMK}.\cos Z - 2\,\text{OMK}.\text{OKL}.\cos X \\ -\, 2.\text{OKL}.\text{OLM}.\cos Y; \end{array}\right.$$

on a

$$x \cos x'x = r \cos x'r, \text{ etc.};$$

d'où

$$(13)\quad \frac{x \cos x'x}{\cos x'r} = \frac{y \cos y'y}{\cos y'r} = \frac{z \cos z'z}{\cos z'r} = r.$$

Les accents désignent, comme ci-dessus, des perpendiculaires aux plans coordonnés.

13. *Équation d'une droite*

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h}:$$

f, g, h donnent la direction de la droite, et nous désignons une telle droite donnée de direction par (fgh).

14. *Angles d'une droite avec les axes.*

Si l'on a

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h} = \rho,$$

on aura, d'après l'équation (4),

$$\rho^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg \cos xy + 2gh \cos yz + 2hf \cos zx;$$

et, d'après les équations (3),

$$\frac{f + g \cos xy + h \cos zx}{\cos xr} = \frac{g + h \cos yz + f \cos xy}{\cos yr}$$
$$= \frac{h + f \cos zx + g \cos yz}{\cos zr} = \rho.$$

15. *Équation d'un plan.* Soit un plan perpendiculaire en R sur OR et OR $= r$; soit R' un point quelconque du plan ayant les coordonnées x', y', z': projetant orthogonalement sur OR la ligne brisée OP'Q'R' formée par les coordonnées de R', on a

$$x' \cos xr + y' \cos yr + z' \cos zr = r$$

pour équation du plan.

Ainsi, si l'on a pour équation d'un plan

$$Ax + By + Cz = D,$$

alors

$$\frac{A}{\cos xr} = \frac{B}{\cos yr} = \frac{C}{\cos zr} = \frac{D}{r},$$

où r est la distance de l'origine au plan, xr l'angle de l'axe des x avec cette distance, etc. Nous désignons par (ABC) un tel plan donné de direction.

Si (fgh) est la direction de cette normale r, on a, d'après les équations (5),

$$\frac{A \sin^2 yz - \gamma B - \beta C}{f} = \frac{B \sin^2 zx - \alpha C - \gamma A}{g}$$
$$= \frac{C \sin^2 xy - \beta A - \alpha B}{h} = \frac{\delta^2 D}{r\rho};$$

et, d'après l'équation (6),

$$\frac{\delta^2 D^2}{r^2} = A^2 \sin^2 yz + B^2 \sin^2 zx + C^2 \sin^2 xy$$
$$- 2AB\gamma - 2BC\alpha - 2CA\beta = \sigma,$$
$$\frac{D}{r} = \frac{\sigma}{\delta}.$$

16. *Condition pour qu'une direction (fgh) soit contenue dans un plan* (ABC).

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h}, \quad \text{équation de la droite,}$$

$$Ax + By + Cz = 0, \quad \text{équation du plan;}$$

on a, pour équation de condition,

$$Af + Bg + Ch = 0.$$

17. *Condition pour que deux directions* (fgh), $(f'g'h')$ *soient dans un plan* (ABC).

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h}, \quad \text{équation de la première direction;}$$

$$\frac{x}{f'} = \frac{y}{g'} = \frac{z}{h'}, \quad \text{équation de la deuxième direction;}$$

$$Ax + By + Cz = 0, \quad \text{équation du plan;}$$

on a

$$\frac{gh' - g'h}{A} = \frac{hf' - h'f}{B} = \frac{fg' - f'g}{C}.$$

18. *Condition pour qu'une direction* (fgh) *soit dans deux plans* (ABC), (A′B′C′).

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + Cz = 0 \\ A'x + B'y + C'z = 0 \end{array}\right\}, \quad \text{équations des deux plans;}$$

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h}, \quad \text{direction;}$$

$$\frac{BC' - B'C}{f} = \frac{CA' - C'A}{g} = \frac{AB' - A'B}{h}.$$

19. *Condition pour qu'une direction* (fgh) *soit normale à un plan* (ABC). La direction (fgh) est perpendiculaire au plan (ABC), lorsque (§ 15)

$$\frac{A\sin^2 yz - \gamma B - \beta C}{f} = \frac{B\sin^2 zx - \alpha C - \gamma A}{g}$$

$$= \frac{C\sin^2 xy - \beta A - \alpha B}{h} = \frac{\partial\sigma}{\rho};$$

ou bien encore, ayant égard aux §§ 14 et 15,

$$\frac{f + g\cos xy + h\cos zx}{A} = \frac{g + h\cos yz + f\cos xy}{B}$$

$$= \frac{h + f\cos zx + g\cos yz}{C} = \rho\frac{\partial}{\sigma};$$

d'où l'on tire

$$Af + Bg + Ch = \rho\frac{\sigma}{\delta}:$$

les valeurs de ρ, σ, δ sont données ci-dessus (p. 9, 11, 12).

20. *Condition pour qu'une direction* (fgh) *soit normale à la direction* ($f'g'h'$).

Il faut que la direction ($f'g'h'$) soit dans le plan normal à la direction (fgh); donc, ayant égard aux §§ 16 et 19,

$$\begin{aligned} f'f + g'g + h'h &+ (f'g + fg')\cos xy \\ + (g'h + gh')\cos yz &+ (h'f + hf')\cos zx = 0. \end{aligned}$$

21. *Condition pour qu'un plan* (ABC) *soit perpendiculaire au plan* (A'B'C'). Le plan (A'B'C') est perpendiculaire au plan (ABC) lorsqu'il contient la normale à ABC; donc, ayant égard aux §§ 16 et 19,

$$\begin{aligned} AA'\sin^2 yz + BB'\sin^2 zx + CC'\sin^2 xy &- \gamma(A'B + AB') \\ - \alpha(B'C + BC') - \beta(C'A + CA') &= 0. \end{aligned}$$

22. *Angle de deux droites.*

Soient la droite (fgh) et la droite ($f'g'h'$); il s'agit de trouver l'angle ROR'; on a

$$(14)\quad \begin{cases} r'\cos rr' = x'\cos xr + y'\cos yr + z'\cos zr, \\ r\cos r'r = x\cos xr' + y\cos yr' + z\cos zr'. \end{cases}$$

x', y', z' sont relatifs au point R'; d'où, ayant égard à l'équation (13),

$$(15)\quad \begin{cases} \cos rr' = \dfrac{\cos xr\cos x'r'}{\cos xx'} + \dfrac{\cos yr\cos y'r'}{\cos yy'} + \dfrac{\cos zr\cos z'r'}{\cos zz'}, \\ \qquad\quad = \dfrac{\cos xr'\cos x'r}{\cos xx'} + \dfrac{\cos yr'\cos y'r}{\cos yy'} + \dfrac{\cos zr'\cos z'r}{\cos zz'}; \end{cases}$$

ici x', y', z' sont des axes normaux aux plans yz, zx, xy (§ 11) : éliminant, de l'une des équations (14), les cosinus au moyen des équations (3), on a

$$(16)\quad \begin{cases} rr'\cos rr' = xx' + yy' + zz' + (xy' + x'y)\cos xy \\ \qquad + (yz' + y'z)\cos yz + (zx' + z'x)\cos zx; \end{cases}$$

ou bien, éliminant des équations (14), les x, y, z, r à l'aide des équations (5),

$$(17)\left\{\begin{aligned}\delta^2\cos rr' = &+ \sin^2 yz \cos xr \cos xr' + \sin^2 zx \cos yr \cos yr'\\ &+ \sin^2 xy \cos zr \cos zr'\\ &- \gamma(\cos xr \cos yr' + \cos xr' \cos yr)\\ &- \alpha(\cos yr \cos zr' + \cos yr' \cos zr)\\ &- \beta(\cos zr \cos xr' + \cos zr' \cos xr);\ (*)\end{aligned}\right.$$

or,

$$\frac{x}{f} = \frac{y}{g} = \frac{z}{h} = \frac{r}{\rho},$$

$$\frac{x'}{f'} = \frac{y'}{g'} = \frac{z'}{h'} = \frac{r'}{\rho'};$$

donc, d'après l'équation (16),

$$\begin{aligned}\rho\rho' \cos rr' = ff' + gg' + hh' + (fg' + gf')\cos xy\\ + (gh' + hg')\cos yz + (hf' + fh')\cos zx.\end{aligned}$$

Si $\cos rr' = 0$, on revient au résultat du § 20.

23. *Angle de deux plans* (ABC) et (A'B'C').

Soient r et r' les perpendiculaires respectives à ces plans; on a

$$\frac{A}{\cos xr} = \frac{B}{\cos yr} = \frac{C}{\cos zr} = \frac{\sigma}{\delta},$$

$$\frac{A'}{\cos xr'} = \frac{B'}{\cos yr'} = \frac{C'}{\cos zr'} = \frac{\sigma'}{\delta};$$

de là et de l'équation (17), on tire

$$\begin{aligned}\sigma\sigma' \cos rr' = AA' \sin^2 yz + BB' \sin^2 zx + CC' \sin^2 xy\\ - \gamma(AB' + A'B) - \alpha(BC' + B'C) - \beta(CA' + C'A).\end{aligned}$$

24. *Angle d'une droite* $(f'g'h')$ *avec le plan* (ABC).

(*) Les formules (15), (16), (17) et la méthode pour les trouver, sont de M. Sturm. (GERGONNE, *Ann.*, t. XV, p. 330.)

Soit (fgh) la direction normale à ABC (§ 15).

$$\frac{A}{\cos xr} = \frac{B}{\cos yr} = \frac{C}{\cos zr} = \frac{\sigma}{\delta}.$$

$$\frac{x'}{f'} = \frac{y'}{g'} = \frac{z'}{h'} = \frac{r'}{\rho'};$$

par conséquent, d'après l'équation (14),

$$\frac{\sigma\rho'}{\delta} \cos rr' = A f' + B g' + C h'.$$

25. *Distance d'un point à un plan.*

r, distance; $Ax + By + Cz = D$, équation du plan; x_1, y_1, z_1, coordonnées du point;

$$r = (D - Ax_1 - By_1 - Cz_1)\frac{\delta}{\sigma}.$$

26. Si l'on a

$$\begin{aligned} gx - fy &= H, \\ hy - gz &= F, \\ fz - hx &= G, \end{aligned}$$

où F, G, H sont des constantes qui déterminent la position, tandis que f, g, h donnent la direction d'une droite; si l'on a

$$Ff + Gg + Hh = 0,$$

cette droite est évidemment dans le plan

$$Fx + Gy + Hz = 0.$$

27. *Condition pour qu'une droite soit contenue dans un plan.*

Soit la droite donnée par les équations du § 26 et

$$Ax + By + Cz = D, \quad \text{l'équation du plan,}$$

le plan

$$\rho(gx - fy - H) = hy - gz - F,$$

où v est un paramètre arbitraire, contient la droite; identifiant, on a

$$\frac{v}{A} = -\frac{vf+h}{gB} = \frac{1}{C} = \frac{vH-F}{Dg},$$

d'où

$$D = \frac{AH-CF}{g} = \frac{BF-AG}{h} = \frac{CG-BH}{f},$$

$$Ff + Gg + Hh = 0, \quad Af + Bg + Ch = 0.$$

28. *Condition pour qu'un point et une droite soient dans un plan.*

Équations de la droite et du plan comme au § 27, x_1. y_1, z_1 coordonnées du point; on a

$$\frac{hy_1 - gz_1 - F}{A} = \frac{fz_1 - hx_1 - G}{B} = \frac{gx_1 - fy_1 - H}{C}$$
$$= \frac{-(Fx_1 + Gy_1 + Hz_1)}{D}.$$

29. *Condition pour qu'un plan contienne deux droites parallèles.*

On aura

$$v(gx - fy - H') = hy - gz - F';$$

les accents se rapportent à la seconde droite parallèle à la première, d'où

$$v(H' - H) = F' - F,$$

$$\frac{F'-F}{A} = \frac{G'-G}{B} = \frac{H'-H}{C} = \frac{HF'-H'F}{gD},$$

et, au moyen des relations ci-dessus,

$$\frac{HF-H'F}{g} = \frac{FG'-F'G}{h} = \frac{GH'-G'H}{f}.$$

30. *Condition pour qu'un plan contienne une droite et soit parallèle à une autre droite.*

La droite (efg) est contenue dans (ABC), donc

$$Af + Bg + Ch = 0;$$

la droite $(f'g'h')$ est dans le plan $(A'B'C')$, donc

$$A'f' + B'f' + C'g' = 0;$$

mais ces deux plans doivent être parallèles, d'où

$$\frac{A'}{C'} = \frac{A}{C}, \quad \frac{B'}{C'} = \frac{B}{C}, \quad \frac{A}{C} = \frac{gh' - g'h}{fg' - f'g}, \quad \frac{B}{C} = \frac{hf' - h'f}{fg' - f'g},$$

$$\frac{D}{C} = \frac{H.\frac{A}{C} - F}{g} = \frac{Ff' + Gg' + Hh'}{fg' - f'g};$$

car

$$Ff + Hh = -Gg,$$

$$\frac{D'}{C'} = \frac{F'f + G'g + H'h}{f'g - g'f}.$$

31. *Condition pour que deux droites soient dans un même plan.*

Il faut que les plans (ABC), $(A'B'C')$ se confondent; donc

$$\frac{D}{C} = \frac{D'}{C'},$$

ou bien

$$Ff' + F'f + Gg' + G'g + Hh' + H'h = 0.$$

32. *Distance d'une droite à un plan parallèle à cette droite.*

Soient (fgh) la droite, (ABC) le plan, et $(A'B'C')$ le plan passant par (fgh) et parallèle à (ABC); la distance de (ABC) à $(A'B'C')$ est la distance cherchée; or cette distance est

$$(D - D')\frac{\delta}{\sigma}, \quad \text{et} \quad D' = \frac{AH - CF}{g} \quad (\S\S\ \mathbf{27}\ \text{et}\ \mathbf{29}),$$

donc la distance cherchée (§ 25),

$$s = \frac{(gD - AH + CF)\delta}{g\sigma}.$$

33. *Plus courte distance de deux droites non dans un même plan.*

Soient (fgh), $(f'g'h')$ les deux droites, (ABC), (A'B'C') deux plans parallèles, le premier passant par (efg), et le second par $(e'f'g')$; la distance de ces deux plans est la distance cherchée : donc

$$s = (\mathrm{D} - \mathrm{D}')\frac{\delta}{\sigma}, \quad \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{F}f' + \mathrm{G}g' + \mathrm{H}h'}{fg' - gf'},$$

$$\frac{\mathrm{D}'}{\mathrm{C}'} = -\frac{\mathrm{F}'f + \mathrm{G}'g + \mathrm{H}'h}{fg' - gf'}:$$

donc

$$s = (\mathrm{F}f' + \mathrm{F}'f + \mathrm{G}g' + \mathrm{G}'g + \mathrm{H}h' + \mathrm{H}'h)\frac{\delta}{\sigma}.$$

34. *Distance d'un point à une droite.*

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point, (fgh) la droite, (A'B'C') un plan passant par le point et la droite; on a donc

$$\frac{hy_1 - gz_1 - \mathrm{F}}{\mathrm{A}'} = \frac{fz_1 - hx_1 - \mathrm{G}}{\mathrm{B}'} = \frac{gx_1 - fy_1 - \mathrm{H}}{\mathrm{C}'}.$$

Soit $(f'g'h')$ une perpendiculaire au plan (A'B'C'); on a (§ 19)

$$\frac{\mathrm{A}'\sin^2 yz - \gamma\mathrm{B}' - \beta\mathrm{C}'}{f'} = \frac{\mathrm{B}'\sin^2 zx - \alpha\mathrm{C}' - \gamma\mathrm{A}'}{g'}$$

$$= \frac{\mathrm{C}'\sin^2 xy - \beta\mathrm{A}' - \alpha\mathrm{B}'}{h'}.$$

Soit (ABC) un plan passant par (fgh) parallèlement à $(f'g'h')$, on a

$$\frac{gh' - g'h}{\mathrm{A}} = \frac{hf' - h'f}{\mathrm{B}} = \frac{fg' - f'g}{\mathrm{C}} = \frac{\mathrm{F}f' + \mathrm{G}g' + \mathrm{H}h'}{\mathrm{D}},$$

$$s = (\mathrm{D} - \mathrm{A}x_1 - \mathrm{B}y_1 - \mathrm{C}z_1)\frac{\delta}{\sigma} \quad (\S\ 25);$$

on met pour A, B, C, D leurs valeurs proportionnelles.

35. *Distance des deux parallèles* (fgh), $(f'g'h')$.

Soit $(A''B''C'')$ le plan passant par les deux droites, on a

$$\frac{F'-F}{A''}=\frac{G'-G}{B''}=\frac{H'-H}{C''}\quad (\S\ 29).$$

Soit $(f''g''h'')$ une perpendiculaire au plan $(A''B''C'')$, on a

$$\frac{A''\sin^2 yz-\gamma B''-\beta C''}{f''}=\frac{B''\sin^2 zx-\alpha C''-\gamma A''}{g''}$$
$$=\frac{C''\sin^2 xy-\beta A''-\alpha B''}{h''}.$$

Pour (ABC) passant par (fgh), et pour $(A'B'C')$ passant par $(f'g'h')$, tous deux parallèlement à la normale $(f''g''h'')$, on a

$$\frac{gh''-g''h}{A}=\frac{hf''-h''f}{B}=\frac{fg''-f''g}{C}=\frac{Ff''+Gg''+Hh''}{D}$$
$$=\frac{F'f''+G'g''+H'h''}{D'};$$

donc

$$s=[(F-F')f''+(G-G')g''+(H-H')h'']\frac{\delta}{\sigma}.$$

36. *Une droite $(f''g''h'')$ passant par un point $(x_1y_1z_1)$ perpendiculairement à la droite (fgh).*

Soient $(A'B'C')$ le plan passant par le point, et la droite (fgh); on a

$$\frac{hy_1-gz_1-F}{A'}=\frac{fz_1-hx_1-G}{B'}=\frac{gx_1-fy_1-H}{C'};$$

le plan (ABC), perpendiculaire à (fgh), donne

$$\frac{f+g\cos xy+h\cos zx}{A}=\frac{g+h\cos yz+f\cos xy}{B}$$
$$=\frac{h+f\cos zx+g\cos yz}{C},$$

d'où

$$\frac{BC'-B'C}{f''}=\frac{CA'-C'A}{g''}=\frac{AB'-A'B}{h''}.$$

37. *Une droite* $(f''g''h'')$ *coupant normalement les droites parallèles* (fgh), $(f'g'h')$.

Le plan $(A'B'C')$ des deux droites parallèles donne

$$\frac{F'-F}{A'}=\frac{G'-G}{B'}=\frac{H'-H}{C'}=\frac{HF'-H'F}{g\,D'};$$

le plan (ABC), perpendiculaire à (fgh), donne

$$\frac{f+g\cos xy+h\cos zx}{A}=\frac{g+h\cos yz+f\cos xy}{B}$$
$$=\frac{h+f\cos zx+g\cos yz}{C},$$

d'où

$$\frac{BC'-B'C}{f''}=\frac{CA'-C'A}{g''}=\frac{AB'-A'B}{h''};$$

la droite $(f''g''h'')$ est dans $(A'B'C')$ si l'on a

$$D'=\frac{A'H''-C'F''}{g},$$

ou si

$$H''(F'-F)-F''(H'-H)=\frac{g''}{g}(HF'-H'F).$$

38. *Droite* $(f''g''h'')$ *normale aux deux droites* (fgh), $(f'g'h')$.

Le plan (ABC) contenant les deux directions (fgh) et $(f'g'h')$, on a

$$\frac{gh'-g'h}{A}=\frac{hf'-h'f}{B}=\frac{fg'-f'g}{C}:$$

$(f''g''h'')$, normale à (ABC), donne

$$\frac{A\sin^2 yz-\gamma B-\beta C}{f''}=\frac{B\sin^2 zx-\alpha C-\gamma A}{g''}$$
$$=\frac{C\sin^2 xy-\beta A-\alpha B}{h''}.$$

Les droites (fgh) et $(f''g''h'')$ doivent être dans un même plan ; de même $(f'g'h')$ et $(f''g''h'')$ donnent

$$F''f + Ff'' + G''g + Gg'' + Hh'' + hH'' = 0,$$
$$F''f' + F'f'' + G''g' + G'g'' + H''h' + H'h'' = 0;$$

et l'on a aussi

$$F''f'' + G''g'' + H''h'' = 0;$$

ainsi F'', G'', H'' sont connus, ainsi que f'', g'', h''.

Observation. Aucun Traité, à ce que je sache, ne donne ces formules élémentaires d'une application si fréquente. M. le D^r J.-G.-H. Swellenbach, de Bonn, vient de publier un ouvrage in-4° de 221 pages, sur *neuf* systèmes de coordonnées dont il étudie et compare les propriétés. Nous y reviendrons.

CONCOURS D'AGRÉGATION POUR LES LYCÉES, EN 1853

(voir t. IX, p. 342).

MATHÉMATIQUES.

1°. Résolution des triangles (*), moyens de vérification.

2°. Étant donné dans un triangle OBC

$$a = 53429^{m},68,$$
$$A = 48^{\circ}\,50'\,14''\,(^{**}),$$
$$B = 65^{\circ}\,47'\,15'',3,$$

résoudre le triangle et le vérifier.

Observation. Telle est la question proposée l'an de

(*) *Rectilignes*, pourquoi ne pas le dire?

(**) Latitude de Paris; encore une question d'origine astronomique :

Qui me délivrera des Grecs et des Romains !

s'écrie Berchoux. J'ajoute, pour ma part : et *des origines astronomiques.*

grâce 1853, chez la *grande* nation, dans la capitale du monde *civilisé,* par l'université *de France,* à des *professeurs* aspirant au grade d'*Agrégé* (*Fellow*)! Monseigneur l'archevêque de Besançon, humaniste distingué, n'a-t-il pas raison d'annoncer que les études baissent et baisseront de plus en plus sous l'empire des nouveaux programmes? Quel homme intelligent, comparant le passé avec le présent et ayant de la conscience, gros comme un grain de moutarde, peut nier cette proposition d'une évidence flagrante? Lorsque, il y a quelques années, on baissa la taille requise pour être soldat, n'a-t-on pas conclu que la taille moyenne était en décroissance?

PHYSIQUE.

1°. Lunette de Galilée. Marche des rayons. Champ Grossissement.

2°. 50 kilogrammes de glace à — 12 degrés étant donnés, combien faut-il de kilogrammes de vapeur formée à 120 degrés pour que le tout se convertisse en eau à 35 degrés?

HISTOIRE NATURELLE.

1°. De la respiration dans les Mammifères;

2°. De la respiration dans les parties vertes des plantes.

SOLUTION DE LA QUESTION 141

(voir t. VI, p. 134);

PAR M. P. TARDY.

Soient A_r, A_{r+1},..., A_{r+2} trois termes consécutifs d'une série récurrente. Si l'on forme la série qui a pour terme général $A_r A_{r+2} - A_{r+1}^2$, elle est aussi récurrente.

Fourier a énoncé ce théorème dans son *Analyse des* *équations déterminées*, page 72. Son objet était de trouver successivement toutes les racines d'une équation par l'emploi des séries récurrentes, en donnant ainsi une grande extension à la méthode découverte par D. Bernoulli pour obtenir la plus grande racine réelle.

Il paraît que quelque erreur s'est glissée dans ce qu'avance à ce propos le célèbre géomètre; mais nous nous bornerons, pour le moment, à démontrer la proposition spéciale rappelée dans ces *Annales*.

Il est aisé de voir que toute série dont le terme général est de la forme

$$\frac{D_1}{a_1^{r+1}} + \frac{D_2}{a_2^{r+1}} + \ldots + \frac{D_n}{a_n^{r+1}},$$

$D_1, D_2, \ldots, D_n$ désignant des constantes arbitraires, est une série récurrente où l'on a fait la variable pour laquelle la série est ordonnée $=1$. Pour avoir la fraction génératrice $\frac{F(x)}{f(x)}$, il suffit de poser

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n),$$
$$F(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_{n-1} x^{n-1},$$

et de déterminer les n quantités $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ par les n équations

$$b_0 + b_1 a_1 + b_2 a_1^2 + \ldots + b_{n-1} a_1^{n-1} = - D_1 (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n),$$
$$b_0 + b_1 a_2 + b_2 a_2^2 + \ldots + b_{n-1} a_2^{n-1} = - D_2 (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\ldots(a_2 - a_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_0 + b_1 a_n + b_2 a_n^2 + \ldots + b_{n-1} a_n^{n-1} = - D_n (a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1}).$$

En effet, nous savons que le terme général de la série récurrente qui provient de la fraction $\frac{F(x)}{f(x)}$ est

$$- x^r \sum_{p=1}^{p=n} \frac{F(a_p)}{f'(a_p)\, a_p^{r+1}}.$$

Maintenant, supposons que A_r soit le terme général d'une série récurrente, et que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ soient les racines de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro le dénominateur de sa fraction génératrice; on aura

$$A_r = \frac{\beta_1}{\lambda_1^{r+1}} + \frac{\beta_2}{\lambda_2^{r+1}} + \ldots + \frac{\beta_n}{\lambda_n^{r+1}}.$$

En changeant r en $r+k$ et en $r+k'$, et en multipliant, il viendra

$$A_{r+k} \cdot A_{r+k'} = \sum_{p=n}^{p=1} \sum_{q=n}^{q=1} \frac{\beta_p \beta_q}{\lambda_p^k \lambda_q^{k'}} \cdot \frac{1}{(\lambda_p \lambda_q)_{r+1}}.$$

Et si l'on prend $h+h'=k+k'$, on aura, en retranchant, un résultat de la forme

$$L = A_{r+k}.A_{r+k'} - A_{r+h}.A_{r+h'} = B_{1,2} \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_2)^{r+1}} + B_{1,3} \frac{1}{(\lambda_1 \lambda_3)^{r+1}} + \ldots$$
$$+ B_{n-1,n} \frac{1}{(\lambda_{n-1} \lambda_n)^{r+1}};$$

et l'on voit que L est le terme général d'une série récurrente qui naît de la fraction

$$\frac{\varphi(x)}{(x - \lambda_1 \lambda_2)(x - \lambda_1 \lambda_3) \ldots (x - \lambda_{n-1} \lambda_n)},$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme d'un degré $= \frac{n(n-1)}{1.2} - 1$.

Prenant $k=0$, $k'=2$, $h=h'=1$, on aura le théorème particulier dont il était question.

SOLUTION DE LA QUESTION 262

(voir t. XI, p. 401) ;

PAR M. P. TARDY.

L'équation

$$(-p)^n = -\frac{n}{1}\mathfrak{E}_{p,n} + \frac{n(n-1)}{1.2}\mathfrak{E}_{2p,n} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\mathfrak{E}_{3p,n} + \ldots \pm \mathfrak{E}_{np,n},$$

où n est un nombre entier positif, p une quantité quelconque, et

$$\mathfrak{E}_{p,n} = \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots n},$$

donnée par M. Catalan, n'est qu'un cas très-particulier de la formule générale du calcul des différences finies

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta^n f(x) &= f(x+n) - \frac{n}{1}f(x+n-1) \\ &+ \frac{n(n-1)}{1.2}f(x+n-2) - \ldots + (-1)^n f(x). \end{aligned}\right.$$

Il suffit de poser

$$f(x) = (-1)^n \frac{px(px-1)(px-2)\ldots(px-n+1)}{1.2.3\ldots n};$$

en effet, il viendra

$$\Delta^n f(x) = (-1)^n \frac{n(n-1)\ldots 2.1.p^n}{1.2\ldots n} = (-p)^n,$$

et

$$f(x+r) = (-1)^n \frac{(x+r)p[(x+r)p-1]\ldots[(x+r)p-n+1]}{1.2.3\ldots n};$$

en substituant dans l'équation (1), et en intervertissant l'ordre des termes dans le second membre, nous aurons

$$(-p)^n = \frac{px(px-1)\ldots(px-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

$$-\frac{n}{1}\frac{(x+1)p[(x+1)p-1]\ldots[(x+1)p-n+1]}{1.2\ldots n}$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{(x+2)p[(x+2)p-1]\ldots[(x+2)p-n+1]}{1.2.3\ldots n}-\ldots$$

$$+(-1)^n\frac{(x+n)p[(x+n)p-1]\ldots[(x+n)p-n+1]}{1.2.3\ldots n},$$

laquelle, pour $x=0$, devient la formule de M. Catalan.

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez Mallet-Bachelier, libraire, quai des Augustins, 55.

Programme des leçons de géométrie rationnelle et appliquée, professées en la Mairie de Gien, par M. *C. Bertrand*, directeur de l'Institution de cette ville. Première partie : *Géométrie plane rationnelle, suivie de la Géométrie de l'échelle et de la théorie de la règle à calculs*. Gien ; 1853 ; in-8 de 68 pages, 1 planche lithographiée. — Prix : 3 francs.

L'avis qui précède ce programme renferme tant d'idées excellentes, que je crois devoir le reproduire *in extenso* :

« Les sciences humaines, nées d'hier, sont encore au berceau ; et cependant l'étude des parties déjà découvertes suffit pour absorber la vie entière d'un homme laborieux et intelligent. On peut dire du monde de l'esprit, ce que

Pascal disait du monde des corps : c'est une sphère infinie dont le centre est partout, et dont la limite n'est nulle part.

» Les études géométriques se présentent sous un double point de vue : spéculatif et pratique. Lorsque l'étude de la géométrie n'a pour objet que les applications de cette science à la vie ordinaire, elle se réduit à peu près à un petit nombre de théorèmes, dont le système rappelle l'humble nom de son berceau : *la mesure des choses terrestres*. Mais quand on la considère sous le point de vue de la spéculation, elle se présente comme un immense réseau de vérités remarquables dont les anneaux s'étendent depuis les axiomes (dont l'évidence est une lumière qui efface tout autre moyen de certitude par l'éblouissement despotique de son éclat), jusqu'aux limites inconnues de l'esprit humain.

» Ainsi considérée, elle peut être regardée non-seulement comme un beau cours de logique formant un salutaire aliment de l'intelligence de l'homme, mais encore comme un préservatif certain contre les ennuis inséparables de toute condition humaine.

» Quand on observe la multitude innombrable des problèmes que cette science peut remuer, on est effrayé de la misère de l'esprit humain, et de l'épaisseur des ténèbres qui entourent l'enfance de son savoir et l'orgueilleuse vieillesse de son ignorance.

» Il en est des découvertes dans les sciences comme dans la géographie ; la chance d'en faire de nouvelles est en raison inverse du nombre des navigateurs qui en ont déjà exploré l'étendue, avec cette différence que la géographie s'arrête à notre chétive planète, tandis que la géométrie s'étend au delà des limites du globe !

» Une erreur commune à quelques jeunes professeurs leur fait croire que ce sont eux qui font les élèves d'élite ; hélas ! non : bien au contraire, ces élèves d'élite arrivent bien souvent à l'état de géomètres inventeurs, *malgré* les soins de leurs maîtres. Cette erreur tient, en général, à ce que tel jeune homme présomptueux, qui *répète* pendant quelques années les leçons de ses professeurs qui ne lui laissent presque rien à trouver *seul,* arrive trop promptement à se croire né géomètre! Passe pour répétiteur.

» Quand on étudie un cours de géométrie; si l'on veut le rendre fertile pour soi-même, on doit, après avoir compris et appris la démonstration de l'auteur, s'exercer à en trouver une autre à soi, sous peine de rester à l'état stérile de *perroquet géométrique.*

» *L'amour-propre* mathématique est une espèce de vanité qui a deux travers d'esprit principaux : la manie de chicaner ou de pointiller sur des arguties prétentieuses et stériles, et la manie de l'improvisation *apparente* de la résolution de certaines difficultés. Manie assez funeste chez ceux qui sont chargés d'apprendre à apprendre!

» Il est bon de remarquer que l'on ne trouvait pas ces faiblesses chez les Laplace, les Lagrange, les Poisson, les Ampère, etc., de savante mémoire; mais qu'on les trouve chez ceux qui n'ont pas élevé les plus beaux monuments scientifiques de ce siècle : la mécanique céleste, le calcul des variations, la théorie de la chaleur et de l'électricité dynamique, etc.

» Pour détruire cette manie, il suffit de changer quelques conditions du problème que ces prétendus *improvisateurs* viennent de résoudre si vite, et de leur demander la nouvelle solution, spontanément et *presto.* L'homme fait est souvent un vieil enfant.

» On voit bien passer de temps en temps des calculateurs rapides, ou plutôt des machines à calculs, braves gens plus ou moins *pâtres;* mais on attend encore le passage d'une machine géométrique, se mouvant avec une vitesse de plusieurs problèmes à l'heure.

» Je me borne à dire au lecteur que le grand Newton, qui cachait *aussi* dans la synthèse les tâtonnements de son analyse, se trahit un jour en disant : J'ai trouvé les lois du système du monde, en y pensant *toujours*. Dans les sciences comme dans les arts, le premier des inventeurs est le tâtonnement marié à l'expérience : union sublime, qui couve le génie dans une mystérieuse incubation.

» La Géométrie a du reste, comme toutes les sciences, ses fanatiques et ses détracteurs. J'ai toujours rencontré ses fanatiques parmi ces âmes ardentes qui cherchent avec enthousiasme la vérité. Quant à ses détracteurs, je les ai presque toujours rencontrés parmi ces hommes qui cherchent à déprécier ce qu'ils ne comprennent nullement, ou qui redoutent le compas dans la mesure de leur savoir (*).

» Je terminerai en redemandant encore une fois la traduction, dans notre langue, des travaux des géomètres étrangers; et la rédaction, par une Commission compétente, d'ouvrages nationaux pour l'enseignement des mathématiques dans nos lycées et institutions (avec révision tous les dix ans, par exemple), en l'escortant d'un catalogue renfermant les énoncés de toutes les propositions mathématiques *actuellement* connues (peut-être 4 ou 5 mille au plus), avec l'indication des sources où on les trouve démontrées *ex-professo*. Mais j'ajouterai que je n'attends plus l'exécution d'un ouvrage qui serait si utile aux jeunes intelligences, tout en rendant à chacun selon ses œuvres. La lumière n'est pas favorable à tout le monde; et certaines plantes ne prospèrent qu'à l'ombre.

» Je finis en remarquant que la Géométrie a aussi sa métaphysique. Par exemple, en changeant de définitions, pourrait-on établir plusieurs séries différentes de vérités

(*) C'est cela. M. Bertrand met le doigt sur la plaie.

géométriques? Existe-t-il plusieurs sortes d'incommensurabilités? Quel est le meilleur enchaînement *possible* des propositions géométriques? etc. Je conseille au lecteur de ne s'occuper de ces questions philosophiques que dans ses moments *perdus;* il est à peu près certain d'en augmenter ainsi le nombre. »

Nous partageons les vœux patriotiques de l'auteur, et, avec lui, son peu d'espoir de les voir réalisés (*).

La lecture de ce programme procure un plaisir instructif; c'est un panorama géométrique. Les énoncés de 214 théorèmes, méthodiquement classés, font connaître ou rappellent les richesses de la géométrie élémentaire moderne.

« Notre intention est d'aider le lecteur laborieux et » intelligent à se rendre capable d'étudier *seul* la plus » grande partie des propositions déjà trouvées; et nous » ajouterons qu'un livre bien utile serait celui qui ren- » fermerait les énoncés seuls de toutes les propositions » mathématiques *actuellement* connues, et l'indication » des sources *françaises et étrangères* où on les trouve » développées » (page 38).

Ces théorèmes sont fondés sur des principes et entremêlés de corollaires, de problèmes et de réflexions très-judicieuses. Citons encore :

« Il y a généralement trois parties dans l'étude d'un » problème : la mise en construction, la preuve et la dis- » cussion. La mise en construction a pour but de lier les » données à l'inconnue par une série d'opérations in- » strumentales, idéales ou effectives, qui ont pour objet » de mettre l'inconnue en évidence. Il n'est pas possible

(*) Une telle Commission n'est-elle pas aussi utile que celle qui a pour mission de recueillir les complaintes et *ponts-neufs* que l'on braillait dans les carrefours au moyen âge, vers lequel on nous pousse? Sans en avoir l'intention, on défait le XVII^{e} siècle, pour revenir au genre chinois, à la culture du *laid idéal*. Tm.

» de donner de règle générale pour la mise en construc-
» tion : c'est une affaire de sagacité personnelle et de
» génie. L'étude et la méditation perfectionnent cette
» aptitude naturelle de l'esprit, mais elles ne sauraient
» la donner. Le procédé le plus usuel consiste à supposer
» le problème résolu et à s'efforcer de changer la diffi-
» culté (au moyen de lignes auxiliaires que l'on trace)
» contre une autre plus facile à résoudre. La collection
» des théorèmes peut être comparée à une sorte de trous-
» seau de clefs que l'on essaye aux serrures à *secret* des
» problèmes. L'expérience et les lueurs de l'esprit dimi-
» nuent le nombre des essais malheureux, mais c'est
» tout ce que l'on peut espérer » (page 15).

M. Bertrand, animé d'un esprit philosophique, aussi rare chez nos géomètres que l'esprit géométrique chez nos philosophes, a dressé avec beaucoup de logique le catalogue des propositions de la géométrie d'Euclide, de la géométrie segmentaire, et des problèmes et conséquences qui s'y rattachent. La théorie des faisceaux anharmoniques manque. La géométrie de la règle de Lambert (*) et de la géométrie du compas de Mascheroni ne sont qu'esquissées. Nous louerons beaucoup le savant auteur de s'être montré peu *français*, en citant des noms propres et des données historiques. C'est d'un bon exemple.

Loin d'être omise, la pratique est enseignée comme découlant de la théorie, et l'on voit ici, pour la millième fois, qu'une pratique *raisonnée* est infiniment plus facile que l'empirisme tant prôné. La saine et véritable doctrine d'Euclide, expulsée des lycées de nos grandes villes, s'est réfugiée dans la maison communale de Gien.

(*) Il n'y a que la première partie de cette géométrie qui soit traduite. M. Bos, studieux professeur attaché au lycée de Louis-le-Grand, traduit la seconde partie, qui sera insérée dans nos *Annales*.

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 275

(voir t. XII, p. 441);

PAR M. GILBERT (PHILIPPE),
Élève à l'Université de Louvain.

Le triangle ABC a un sommet fixe A, un angle constant A. les sommets B et C sont sur une droite fixe. Quelle est l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle?

Soit XX' la droite fixe. Du point A, sur cette droite, abaissons la perpendiculaire AD; soient O le centre du cercle circonscrit à ABC, OP perpendiculaire sur XX', et tirons OA, OB, OC. On a

$$\text{OA} = \text{OB} = \text{OC},$$

$$\text{angle BOP} = \frac{1}{2}\,\text{angle BOC} = \text{angle BAC} = \text{A},$$

$$\text{OP} = \text{OB} \cos \text{BOP} = \text{OA} \cos \text{A},$$

d'où

$$\frac{\text{OA}}{\text{OP}} = \frac{1}{\cos \text{A}}.$$

Le rapport $\frac{\text{OA}}{\text{OP}}$ est constant et > 1; donc *le lieu des centres O est une hyperbole dont A est un foyer, XX' la directrice correspondante, et dans laquelle le rapport de l'excentricité $2c$ à l'axe réel $2a$ est égal à* $\frac{1}{\cos \text{A}}$. Son axe est dirigé suivant AD.

Prenant sur AD un point S tel, que $\frac{\text{SA}}{\text{SD}} = \frac{1}{\cos \text{A}}$, S sera l'un des sommets de l'hyperbole.

On a ensuite

$$c : a = \text{SA} : \text{SD},$$

d'où

$$c - a : a = SA - SD : SD, \quad c - a = SA;$$

donc

$$a = \frac{SA \cdot SD}{SA - SD}.$$

Portant cette longueur sur l'axe, à partir du sommet S, on aura le centre E de l'hyperbole, et le *second foyer* A', en prenant EA' = EA sur cette même droite. La branche de courbe qui répond au foyer A correspond aux positions de l'angle A, dans lesquelles ses deux côtés ou les deux prolongements viennent rencontrer XX', et l'autre branche aux positions où l'un des côtés et le prolongement de l'autre déterminent le triangle ABC.

Cela posé, si le centre O du cercle circonscrit est sur la première branche, on a, par la propriété de l'hyperbole,

$$OA' - OA = 2a, \quad \text{ou} \quad OA' = OA + 2a;$$

sur la seconde, on a

$$OA - OA' = 2a, \quad \text{ou} \quad OA' = OA - 2a.$$

Donc, *si du foyer* A' *comme centre, et d'un rayon* $2a$, *on décrit un cercle, il sera tangent au cercle mobile,* car la distance des centres sera égale à la somme des rayons dans le premier cas, à leur différence dans le second. *Le cercle est donc l'enveloppe demandée.*

Remarques. On y arrive aussi en observant que la corde d'intersection de deux cercles infiniment voisins est perpendiculaire à la sécante OO' qui passe par leurs centres, et qui a pour limite la tangente en O à l'hyperbole, de sorte que le point d'intersection limite, qui appartient à l'enveloppe, est sur la perpendiculaire AT à cette tangente en O, à une distance TM = TA. On retrouve ainsi le même cercle.

Si $A = 90$ degrés, $\cos A = 0$, $\frac{c}{a} = \infty$, $SD = 0$. l'hyperbole se réduit à la droite XX', et l'enveloppe à un point, symétrique au point A, par rapport à XX'.

THÉORÈME SEGMENTAIRE SUR LE TRIANGLE INSCRIT DANS UNE CONIQUE.

THÉORÈME. *Un triangle étant inscrit dans une conique, toute sécante menée par le pôle d'un des côtés coupe les deux autres côtés en deux points polairement conjugués.*

Démonstration. Soit ABC le triangle inscrit; par le pôle de AB menons une sécante coupant le côté BC en D et côté AC prolongé en E; soient F le point où la droite BE rencontre la conique et G le point de rencontre des côtés opposés AB, CF du quadrilatère inscrit ABCF, et D′ le point d'intersection des diagonales AF, BC du même quadrilatère. D'après une propriété connue, les trois points D′, E, G sont polairement conjugués, et D′G est la polaire du point E qui est sur la sécante: mais BAG est la polaire d'un autre point de la sécante, donc G est le pôle de la sécante DE; mais G est aussi le pôle de la droite D′E, donc les points D et D′ se confondent; donc D et E sont polairement conjugués. C. Q. F. D.

Corollaire 1. Si la sécante est un diamètre conjugué au côté AB, le demi-diamètre est une moyenne proportionnelle géométrique entre OD et OE, O étant le centre de la conique.

Corollaire 2. Connaissant trois points d'une conique et le centre, le corollaire précédent fait connaître la *grandeur* d'un demi-diamètre conjugué à l'un des côtés du triangle donné, et par conséquent on peut construire tous les éléments de la conique sans qu'elle soit tracée.

Corollaire 3. Étant données cinq tangentes à une conique; au moyen du théorème de Newton sur le quadrilatère circonscrit, on détermine le centre; par le théorème de Brianchon sur l'hexagramme circonscrit, on détermine les points de contact; l'on revient ainsi au corollaire 2.

Corollaire 4. Étant donnés cinq points d'une conique; au moyen de l'hexagramme de Pascal, on détermine les cinq tangentes qui passent par ces points, et l'on revient au corollaire 3.

Note. J'ai trouvé ce théorème, réduit au corollaire 1er, dans l'ouvrage suivant : *Trattato elementare di Geometria analitica;* per Rafaele Rubini. Napoli, 1852; in-8° de 496 pages. C'est l'œuvre d'un jeune homme, dédié à son professeur Fortunata Padula, auteur d'un *Raccolta di problemi di geometria risoluti con l'analisi algebrica.* La simple démonstration *segmentaire* du théorème m'a été donnée par M. A. Mannheim; l'habile géomètre vient de faire construire une *Règle à calcul cylindrique,* plus commode, plus exacte, que sa règle plate (*voir* t. XII, p. 327), et plus portative (*). Nous remarquerons, à cette occasion, qu'à la Notice bibliographique donnée par M. Benoît, sur *cette règle* (*voir* t. XII, p. 328), on doit ajouter l'ouvrage *Usus scalarum logisticarum,* du célèbre Segner (Jean-André de), et qui ne se *trouve* pas à la Bibliothèque impériale.

EXERCICE SUR UNE ÉQUATION NUMÉRIQUE;

PAR M. KORALEK,

Employé au Ministère de l'Agriculture, du Commerce et des Travaux publics (bureau de la Statistique générale de France).

Dans le célèbre Mémoire sur Uranus, M. Le Verrier parvient à l'équation suivante :

$$5797x^4 + 4951x^3 + 5892x^2 + 2876x + 6942 = 0,$$

(*) Le théorème est cité dans la *Géométrie analytique* de MM. Bouquet et Briot (p. 370); on peut le déduire du théorème de Desargues sur l'involution.

et il démontre que les quatre racines sont imaginai
c'est ce que MM. Prouhet et Vincent ont aussi dém
d'une manière plus simple (*Nouvelles Annales*, t. X); dès lors on peut appliquer à cette équation la méthode de solution que j'ai naguère indiquée (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 117). A cet effet, changeant x en $-x$, on obtient

$$x^4 - 2ax^3 + bx^2 - 2cx + d = 0,$$

$$2a = \frac{4951}{5797}, \quad b = \frac{5892}{5797}, \quad 2c = \frac{2876}{5797}, \quad d = \frac{6942}{5797},$$

$$2a = 0,8540624,$$
$$b = 1,0163178,$$
$$2c = 0,4961187,$$
$$d = 1,1975159.$$

Soient $\alpha \pm \beta i$, $\alpha_1 \pm \beta_1 i$ les quatre racines de cette équ
tion; posant

$$y = \alpha\alpha_1,$$

on obtient l'équation

$$16y^3 - 8by^2 + (b^2 - 4ac - 4d)y - abc + a^2 d + c^2 = 0 \ (*),$$

$$b^2 + 4ac - 4d = \frac{112016356}{5797^2},$$

$$8b = \frac{47136}{5797}.$$

$$-abc + a^2 d + c^2 = \frac{33554404655,5}{5797^3}.$$

Faisons $y = \dfrac{1000\,v}{5797}$, on a

$$(1) \quad 16v^3 - 47,136v^2 - 112,016356v + 33,5544046555 = 0,$$

$$(2) \quad v^3 - 2,946v^2 - 7,00102225v + 2,0971502915937 5 = 0.$$

(*) [Il e]xiste une faute typographique; au lieu de abd, il faut $a^2 d$.

Faisant disparaître le deuxième terme en posant

$$v = z + \frac{2.946}{3} = z + 0,982,$$

on obtient

(3) $$z^3 - 9,89399425\,z - 6,6717858939o625 = 0;$$

la solution trigonométrique donne (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 374)

$$\frac{3}{4}r^2 = \quad 9,89399425, \quad \frac{1}{4}r^3 \sin 3\varphi = -6,6717859,$$
$$r = -3,632078, \qquad \varphi = +11^\circ 16' 56'',3;$$

donc les racines de l'équation (3)

$$z_1 = r \sin \varphi, \quad z_2 = r \sin(60^\circ - \varphi), \quad z_3 = -r \sin(60^\circ + \varphi),$$

ou

$$z_1 = -0,7105916,$$
$$z_2 = -2,729390,$$
$$z_3 = +3,439982.$$

Vérification.

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0, \quad z_1 z_2 z_3 = 6,671780;$$

donc, exact à 6 millionièmes près.

Quant aux racines de l'équation (2), on a

$$v = z + 0,982,$$

donc

$$v_1 = \quad 0,2714084,$$
$$v_2 = -1,747390,$$
$$v_3 = +4,421982;$$

et, par suite,

$$y_1 = \quad 0,04681877,$$
$$y_2 = -0,3014300,$$
$$y_3 = \quad 0,7628052.$$

Avec les valeurs de

$$y_1 = -0,3014300,$$

on a (*voyez* t. XI, p. 118)

$$\begin{aligned}
\alpha &= +0,8025987,\\
\alpha_1 &= -0,3755675,\\
\beta &= +0,8118180,\\
\beta_1 &= +0,8819542 = \left(\frac{y_3 - y_2}{\beta}\right),
\end{aligned}$$

servant de contrôle.

Les racines de l'équation (1) sont conséquemment

$$\begin{aligned}
\alpha \pm \beta i &= 0,8025987 \pm 0,8118180\sqrt{-1},\\
\alpha_1 \pm \beta_1 i &= -0,3755675 \pm 0,8819542\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Vérification.

On a

$$(1)\left\{\begin{aligned}
\alpha^2 &= 0,6441647\\
\beta^2 &= 0,6590483\\
\alpha_1^2 &= 0,1410510\\
\beta_1^2 &= 0,7778437\\
4\alpha\alpha_1 &= -1,2057199\\
\hline
\alpha^2+\beta^2+\alpha_1^2+\beta_1^2+4\alpha\alpha_1 &= 1,0163878 = b = 1,0163878
\end{aligned}\right.$$

très-exact.

$$2(\alpha + \alpha_1) = 0,8540624 = 2a,$$

$$(2)\quad \alpha_1(\alpha^2+\beta^2) + \alpha(\alpha_1^2+\beta_1^2) = +0,2480592 = c = 0,2480593;$$

exact à une unité décimale du septième ordre.

$$(3)\quad (\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2) = 1,1975155 = d = 1,1975159;$$

très-exact.

On a donc, pour l'équation donnée, les quatre racines

$$\begin{aligned}
-0,8025987 &\pm 0,8118180\sqrt{-1},\\
0,3755675 &\pm 0,8819542\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Note du Rédacteur.

Sur les équations numériques à coefficients approchés.

Ce genre d'équations, les plus fréquentes qu'on rencontre dans les mathématiques appliquées, et surtout en astronomie, présente une difficulté grave. Soit l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

supposons que $b^2 - 4ac$ soit une quantité positive très-petite, les deux racines sont réelles. Pour peu qu'on augmente les coefficients a et c, le binôme $b^2 - 4ac$ peut devenir négatif, et les racines devenir imaginaires. Le même fait se présente dans une équation quelconque. La plus légère altération dans les coefficients peut faire passer des racines de la réalité à l'imaginarité, et *vice versâ*. Lors donc qu'on a trouvé les racines réelles et imaginaires d'une équation dont les coefficients ne sont qu'approchés, comment savoir si l'on ne trouve pas d'autres résultats en poussant l'approximation plus loin? Exemple : Dans le Mémoire cité ci-dessus, on lit une équation du dixième degré, et l'on indique quatre racines réelles *approchées;* ces racines procurent un facteur de quatrième degré, à coefficients *approchés;* divisant l'équation donnée par ce facteur, on parvient à une équation du sixième degré, à coefficients *approchés*, et l'on démontre que cette équation a six racines imaginaires (*Nouvelles Annales*, t. X, p. 89 et 275); et de là l'auteur du Mémoire conclut que l'équation du dixième degré a aussi six racines imaginaires. Cette conclusion, portant sur des coefficients approchés, d'après les raisons exposées ci-dessus, ne me semble pas légitime. Ce point d'analyse, vu son importance pratique, mérite d'être éclairci. Du reste, M. Koralek a démontré directement que cette équation du dixième degré n'a que quatre racines réelles, ainsi que nous le verrons prochainement.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DE LA PARABOLE (*);

Par M. Charles MÉRAY,
Élève du lycée Saint-Louis (institution Barbet).

Définitions.

J'appelle *conique* le lieu des points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques. *Une telle courbe est toujours rencontrée par une droite en deux points (réels ou imaginaires).* Car ces points sont les points de deux divisions homographiques, tracées sur cette droite par les faisceaux générateurs. Il s'ensuit que *si autour de deux points quelconques d'une conique, on fait tourner deux droites mobiles se coupant sur la courbe, les faisceaux ainsi formés autour des points fixes seront homographiques.* Car à un rayon de l'un correspond toujours un seul rayon de l'autre, ce qui est le caractère *essentiel* des faisceaux homographiques.

Problème. *Construire la tangente en un point donné de la courbe formée par les faisceaux o, o'.*

Soient m le point donné, et m' le point infiniment voisin; mm' est la tangente demandée : la droite $\overline{om\ o'm'}$; $\overline{om'.o'm}$ passe par ω, point d'intersection des rayons qui, dans chaque faisceau, correspondent à la droite oo' considérée comme étant un rayon de l'autre; rayons que la théorie

(*) Ce qui est entre guillemets ne se trouvait pas dans la composition présentée au grand concours de 1853 (*voir* t. XII, p. 314).

des faisceaux homographiques apprend à construire (*Géométrie supérieure*, n^{os} 111 et 114) ; de plus, dans le quadrilatère $omo'm'$, la diagonale oo' est coupée harmoniquement par les deux autres qui sont mm' et $\overline{om'}\,\overline{o'm'}$; $\overline{om'}\,\overline{o'm}$; donc, pour avoir la tangente demandée, menez $m\omega$ et prenez la conjuguée harmonique de cette droite par rapport à mo et mo'. On voit, par ce qui précède, que les droites $o\omega$, $o'\omega$, sont les tangentes à la courbe aux points o, o'.

Soient O, O′ ces tangentes, M la tangente à la courbe au point m ; a, a' ses points d'intersection respectivement avec O et O′ ; α, α' les traces des rayons om, $o'm$ respectivement sur O et O′. Les quatre points α, a, o, ω sont en rapport harmonique : on a donc l'équation

$$\frac{oa}{o\omega} : \frac{\alpha a}{\alpha\omega} = -1,$$

ou bien

$$oa.\omega\alpha - o\omega.\alpha a = 0 ;$$

les points mobiles α, a divisent donc homographiquement la droite O [*Géométrie supérieure*, n° 161, équ. (2)] ; il en est de même pour les points α', a' relativement à la droite O′ ; mais les points α, α' appartiennent évidemment à deux divisions homographiques formées sur les droites O, O′, par les faisceaux o, o' : donc les points a, a' divisent homographiquement les droites O, O′ ; par conséquent : *toute conique est l'enveloppe des droites qui joignent les points homologues de deux divisions homographiques.* Donc, *d'un point quelconque* λ *on ne peut mener que deux tangentes (réelles ou imaginaires) à une conique.* Ces tangentes sont les rayons doubles des faisceaux homographiques λa, $\lambda a'$. La réciproque de ce théorème se démontrerait aisément, par des raisonnements tout à fait corrélatifs à ceux-ci. Il n'y aurait qu remplacer, dans la démonstration précédente, les point par des droites, et réciproquement.

Je pourrai donc, dans ce qui suit, prendre aussi por définition des coniques cette dernière propriété.

Les coniques se partagent en trois genres bien diffé rents par la considération de leurs points situés à l'infin

Je suppose que l'on transporte un des faisceaux généra teurs parallèlement à lui-même, de manière que son centre coïncide avec celui de l'autre. Il peut se présenter trois cas : les rayons doubles peuvent être réels et différents, imaginaires, coïncidents. Dans le premier cas, les points de la courbe situés à l'infini sont réels et différents, la courbe a deux asymptotes réelles parallèles aux rayons doubles, c'est une *hyperbole ;* dans le second cas, les points à l'infini sont imaginaires, la courbe est une *ellipse ;* enfin, dans le troisième cas, les points à l'infini coïncident et la courbe est une *parabole.* On voit par là que la parabole est tangente à la droite de l'infini. Puisque la droite de l'infini est une des tangentes de la parabole, *les divisions homographiques, tracées sur deux tangentes fixes par une tangente mobile, sont semblables,* car, dans ces divisions, les points à l'infini, dans chaque division, sont homologues (*Géométrie supérieure,* n° 125). La réciproque est évidente.

Si l'on transporte, où on le voudra, dans le plan et parallèlement à eux-mêmes les faisceaux générateurs o, o', la conique correspondante restera toujours homothétique à elle-même, et l'on peut remarquer que l'angle des rayons doubles des faisceaux dont les centres coïncident et dont j'ai parlé plus haut, n'a pas changé, et que réciproquement si cet angle est constant dans le mouvement, la forme de la conique ne change pas. Donc : *deux hyperboles qui ont même angle asymptotique sont sem-*

blables; et, par suite, *deux paraboles quelconques sont semblables*, puisque, dans ce cas, cet angle est toujours nul. Je ferai remarquer que chaque couple de ces rayons doubles forme une conique semblable à une des coniques engendrées par les faisceaux o, o'.

Équation générale de ces courbes en coordonnées rectangles.

« Une des équations qui expriment l'homographie des
» faisceaux o et o' est, comme on le sait,

$$\frac{\sin(A, M)}{\sin(B, M)} = \lambda \frac{\sin(A', M')}{\sin(B', M')} \quad (\textit{Géométrie supérieure}, \text{ n}^{\text{o}}\ \mathbf{145}.)$$

» A, B, M sont dans le faisceau o les homologues respec-
» tifs de A', B', M', dans le faisceau o', et λ est une con-
» stante quelconque. Je prends pour axes une parallèle et
» une perpendiculaire à oo'; si α, β, α', β', μ, μ', sont
» les angles que font, avec l'axe des x, (oo'), A, B, A',
» B', M, M', l'équation précédente s'écrira

$$\frac{\sin(\mu - \alpha)}{\sin(\mu - \beta)} = \lambda \frac{\sin(\mu' - \alpha')}{\sin(\mu' - \beta')},$$

» ou, si l'on désigne par (a, b), (a', b), (x, y), les coor-
» données des points o, o', m,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\cos\alpha \dfrac{(y-b)}{\sqrt{(y-b)^2+(x-a)^2}} - \sin\alpha \dfrac{(x-a)}{\sqrt{(y-b)^2+(x-a)^2}}}{\cos\beta \dfrac{(y-b)}{\sqrt{(y-b)^2+(x-a)^2}} - \sin\beta \dfrac{(x-a)}{\sqrt{(y-b)^2+(x-a)^2}}} \\ -\lambda\, &\frac{\cos\alpha' \dfrac{(y-b)}{\sqrt{(y-b)^2+(x-a')^2}} - \sin\alpha' \dfrac{(x-a')}{\sqrt{(y-b)^2+(x-a')^2}}}{\cos\beta' \dfrac{(y-b)}{\sqrt{(y-b)^2+(x-a')^2}} - \sin\beta' \dfrac{(x-a')}{\sqrt{(y-b)^2+(x-a')^2}}} \end{aligned}\right\} = 0.$$

» Cette équation est toujours du second degré, ce » qu'on pouvait prévoir, car la courbe est toujours coupée » par une droite en deux points. Nous verrons plus bas » comment elle se simplifie, par un choix convenable » d'axes. On voit de suite, par cette équation, que si la » conique se réduit à deux droites, la fonction du pre- » mier membre se décomposera en facteurs du premier » degré. Il n'y a qu'à prendre dans l'équation précédente » oo' pour A et A'. Réciproquement, *toute courbe du se-* » *cond degré est une conique,* car j'ai démontré plus » haut qu'une courbe jouissant de la propriété d'être tou- » jours coupée par une droite en deux points en était une. »

Les belles propriétés des quadrilatères et hexagones inscrits ou circonscrits à des coniques, sont trop connues pour qu'il soit besoin d'en parler ici, je les admettrai donc; du reste, ces propriétés découlent immédiatement des définitions précédentes.

Théorie des pôles et des polaires.

Problème. *On donne une conique Σ et un point λ dans le plan, par ce point on mène une droite quelconque Λ; soient ε, φ les points (réels, imaginaires) de la conique situés sur Λ, et λ' le conjugué harmonique de λ par rapport à ε, φ; on demande le lieu de λ' quand on fait mouvoir Λ autour de λ.*

Soient o, o' les faisceaux générateurs; les rayons homologues M, M' de ces faisceaux tracent sur Λ deux divisions homographiques dont les points doubles sont ε et φ; mais (*Géométrie supérieure,* n° 267) quand deux divisions homographiques sont formées sur une même droite, le conjugué harmonique d'un point de la droite par rapport aux points doubles est le même que le conjugué harmonique du même point par rapport à ses deux homologues, quand on le considère comme appartenant successivement aux deux divisions; or le lieu de ces points homologues se compose actuellement de deux droites, qui sont dans le second et le premier faisceau les homologues de $o\lambda$, $o'\lambda$, considérées comme appartenant au premier et au second : donc *le lieu demandé est la polaire du point λ par rapport à ces droites*. Cette droite est appelée la *polaire* du point λ par rapport à la conique Σ. On conclut facilement de ce raisonnement, que *dans tout quadrilatère inscrit à une conique, chaque diagonale est la polaire du point d'intersection des deux autres diagonales*. Si l'on considère une conique comme l'enveloppe des droites qui joignent les points homologues de deux divisions homographiques, on verra par un raisonnement corrélatif au précédent, que *si l'on a une conique Σ et une droite Λ, et que de chacun de ses points on mène deux tangentes* E, Φ *à la courbe Σ, l'enveloppe de la conjuguée harmonique Λ' de Λ par rapport à* E, Φ *est un certain point fixe*. Ce point est appelé le *pôle* de la droite Λ. Ce raisonnement ferait voir facilement que *dans tout quadrilatère circonscrit à une conique, le pôle d'une diagonale est le point d'intersection des deux autres diagonales*. Remarquons aussi que *la polaire d'un point est la droite qui joint les points de contact des tangentes à la courbe issues de ce point*, et que *le pôle d'une droite est le point de concours des tangentes menées aux points d'intersection de la droite et de la courbe*. Cela posé, il est visible qu'*une droite Λ est la polaire de son pôle λ*.

La polaire Λ d'un point λ contient le pôle π d'une droite quelconque Π qui passe par le point λ; car, soient ε, φ les points d'intersection de la conique avec Λ, le conjugué harmonique π de $\overline{\Lambda\Pi}$, par rapport à ε et φ, jouit de la propriété de diviser harmoniquement, conjointement avec la conique et la droite Π, deux droites qui sont Λ et

$\pi\lambda$. Donc, *si un point décrit une droite, sa polaire, par rapport à une conique fixe, enveloppe un point, et réciproquement.* « On aurait pu parvenir par une autre voie » également simple, aux propriétés des pôles et des po- » laires; car soient un point λ, les tangentes E, Φ issues » de ce point à une conique, ε, φ leurs points de contact. » et Λ la corde de contact: le triangle $\lambda\varepsilon\varphi$ est un véritable » quadrilatère inscrit à la conique, deux côtés coïncident » sur Λ; donc, en vertu du théorème de Desargues, une » sécante M coupe la conique et le quadrilatère en six » points en involution; deux points conjugués coïncident » sur Λ, et si la sécante passe par le point λ, deux autres » points conjugués coïncideront avec λ. Ces points sont » donc les points doubles de l'involution; par suite, ils » sont conjugués harmoniques par rapport aux points » d'intersection de la sécante avec la conique. On démon- » trerait tout aussi facilement la seconde propriété, en » considérant le triangle EΦΛ comme un quadrilatère » circonscrit. Mais ces solutions ont l'inconvénient d'être » moins directes que les précédentes; on n'en peut pas » tirer immédiatement les propriétés des quadrilatères » inscrits et circonscrits, trouvées plus haut. »

Deux points sont dits *conjugués* quand la polaire de l'un passe par l'autre, et deux droites sont dites *conjuguées* quand le pôle de l'une est situé sur l'autre. Si l'on conçoit tous les couples de points conjugués situés sur une droite A, ces points forment deux divisions homographiques en involution, dont les points doubles sont les points d'intersection de la conique avec la droite A. Si, de même, on conçoit tous les couples de droites conjuguées passant par un point a, ces droites formeront autour du point deux faisceaux homographiques en involution, et les rayons doubles seront les tangentes à la conique issues du point a. Quand on a deux faisceaux homographiques en involution, il existe toujours un système de deux rayons conjugués rectangulaires; et s'il y en a plus d'un, tous les rayons sont respectivement perpendiculaires à leurs conjugués (*Géométrie supérieure*, nos 249 et 250). Donc, *en chaque point du plan d'une conique il y a un système de deux droites conjuguées rectangulaires*. Je parlerai plus bas des points remarquables autour desquels une droite quelconque est perpendiculaire à sa conjuguée.

Du centre et des diamètres.

Si l'on considère le point dont la polaire est à l'infini (ce point existe toujours, car une droite n'a qu'un pôle, et, par conséquent, ce pôle ne peut pas être imaginaire), on voit facilement que, *dans l'ellipse ou l'hyperbole, ce point n'est pas à l'infini*, car ces courbes ne sont pas tangentes à la droite de l'infini; qu'*il est le milieu de toutes les cordes qui y passent*, c'est-à-dire le *centre* de la courbe; que *le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée est une droite qui passe par le centre*, c'est-à-dire que dans ces courbes *tous les diamètres sont des droites*. On voit de plus que, *dans l'hyperbole, les asymptotes passent par le centre*. Deux droites conjuguées passant par le centre jouissent évidemment de cette propriété, que l'une divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à l'autre, et réciproquement : ce sont des *diamètres conjugués*. Il suit de là que *les ellipses et les hyperboles ont toujours deux axes de symétrie :* ce sont les droites conjuguées rectangulaires qui passent par le centre.

Dans la parabole, *aucun point de son plan ne peut être considéré comme en étant le centre*, car si ce point existe, il sera évidemment le pôle de la droite de l'infini; et comme ce pôle est situé sur la courbe (puisque la parabole est tangente à la droite de l'infini), il ne peut être le milieu des cordes qui y passent. Il est donc inexact de dire que la parabole a un centre à l'infini, car cela reviendrait à dire que certaines droites coupent cette courbe en trois points (*). Tous les diamètres de la parabole sont des droites qui passent par le point de contact de la courbe et de la droite de l'infini, et cette courbe n'a qu'une axe de symétrie.

Quand on a deux faisceaux homographiques en involution, il existe les relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} 1^{\circ}. & \dfrac{\sin(E, M)}{\sin(F, M)} = -\dfrac{\sin(E, M')}{\sin(F, M')}; \\ 2^{\circ}. & \dfrac{\sin(A, M)\sin(A, M')}{\sin(A', M)\sin(A', M')} = \text{const.}; \\ 3^{\circ}. & \operatorname{tang}(O, M).\operatorname{tang}(O, M') = \text{const.} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \textit{Géométrie supérieure}, \\ \text{n}^{\text{o}}\ \mathbf{232}. \end{array}$$

Dans la première équation, E, F sont les rayons doubles, M, M′ deux rayons conjugués quelconques; dans la deuxième, (A, A′), (M, M′) sont deux couples quelconques de rayons conjugués; dans la troisième, O est un rayon perpendiculaire à son conjugué, et (M, M′) un couple quelconque de rayons conjugués. Donc, puisque dans les ellipses et les hyperboles, les diamètres conjugués forment deux faisceaux en involution, ces trois équations seront autant de propriétés de ces diamètres. Les deux dernières fournissent la relation connue qui existe entre les coefficients angulaires de deux diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole rapportée à deux diamètres conjugués quelconques, à savoir

$$mm' = \text{const.}$$

La dernière se rapporte au cas où les axes de coordonnées seraient les axes mêmes de la courbe. Dans le cas de l'hy-

(*) Nous n'admettons pas cette assertion, le mot *centre* n'a pas ici la signification ordinaire. TM.

perbole, les rayons doubles des faisceaux en involution formés par les diamètres conjugués sont les asymptotes; et si l'on rapporte la courbe à ces droites, l'équation 1° fournira, entre les coefficients angulaires m, m' de deux diamètres conjugués, la relation aussi connue

$$m + m' = 0.$$

Si dans l'ellipse ou l'hyperbole on joint un point de la courbe aux extrémités d'un diamètre, ces droites seront parallèles à deux diamètres conjugués; il existera donc, entre les angles que font ces droites avec le diamètre fixe et son conjugué, les relations (1); et si l'on exprime dans 2° ou 3° les rapports de sinus au moyen des coordonnées du point, on aura l'équation de la courbe rapportée à deux diamètres conjugués ou aux axes; on trouvera ainsi

$$\frac{x^2}{M} + \frac{y^2}{N} = 1.$$

M et N sont de mêmes signes si la constante est négative, et de signes contraires si elle est positive. Pour la parabole, des considérations analogues donneraient

$$\frac{y}{x} \cdot \frac{y}{\infty} = \frac{y'}{x'} \cdot \frac{y'}{\infty};$$

(x, y), (x', y') étant deux points de la courbe rapportée à un diamètre et à la tangente à son extrémité, ou bien

$$y^2 = Kx.$$

Propriétés des points tels que, autour de l'un d'eux, une droite quelconque est perpendiculaire à sa conjuguée.

Soient une conique Σ et un quadrilatère circonscrit, dont les couples de sommets opposés sont a, a'; b, b'; c, c'; menons d'un point α les droites αa, $\alpha a'$, αb, $\alpha b'$, αc, $\alpha c'$, et les tangentes M, M′ à la courbe; si l'on prend les deux droites E, Φ, qui sont conjuguées harmoniques à la fois, relativement à αa, $\alpha a'$ et M, M′, elles le seront aussi par rapport à αb, $\alpha b'$ et αc, $\alpha c'$, puisque, en vertu d'un théorème connu (le théorème corrélatif de celui de Desargues), trois quelconques des couples αa, $\alpha a'$; αb, $\alpha b'$; αc, $\alpha c'$; M, M′ sont en involution; par conséquent, si on prend les points d'intersection ε, φ de E, Φ, avec une diagonale quelconque, bb' par exemple, et qu'on fasse varier le point α, les points tels que ε, φ formeront sur cette droite deux divisions homographiques en involution, dont les points doubles sont b et b'. On peut donc affirmer que *si, pour chaque point α du plan, il existe deux droites conjuguées telles, que leurs points d'intersection avec une droite fixe forment deux divisions homographiques en involution, ces droites jouiront de la même propriété relativement à chacune des diagonales d'un quadrilatère circonscrit à la conique, dont deux sommets opposés sont les points doubles de ces divisions en involution*; et l'on peut observer que les points doubles des divisions en involution formées sur ces dernières droites, sont les sommets du quadrilatère.

Si en chaque point du plan d'une conique, on conçoit les droites conjuguées rectangulaires qui y passent, ces droites forment, sur la droite de l'infini, deux divisions en involution. Soient p, q les points doubles; si de ces points on mène des tangentes à la conique, on formera un quadrilatère qui, en vertu du théorème précédent, jouira de la propriété, que les deux autres diagonales seront divisées en involution par les droites conjuguées rectangulaires. Comme, dans tout quadrilatère circonscrit, le point d'intersection de deux diagonales est le pôle de la troisième, et que, dans tout quadrilatère, le segment compris entre deux sommets opposés est divisé harmoniquement par les deux autres diagonales, *les deux droites qui, conjointement avec la droite de l'infini, jouiront de la propriété d'être divisées en involution par les droites conjuguées rectangulaires, seront les axes de la conique, et sur chaque axe, les points doubles seront de part et d'autre du centre et à égales distances.* Je désignerai ces points par f, f_1; f', f'_1.

Étant donnée une droite, il y en a toujours une autre, et une seule, qui jouit de la propriété d'être à la fois conjuguée et perpendiculaire à la proposée; car cette seconde droite s'obtient en prenant le pôle de la première, et en abaissant de ce point une perpendiculaire sur cette dernière droite. Si donc a, a_1 sont les points d'intersection d'une droite A avec les axes d'une conique; a', a'_1 les conjuguées de ces points respectivement par rapport à ff_1, $f'f'_1$; la droite A′, qui passe par a', a'_1, est conjuguée et perpendiculaire à A; car, soient α, α' le point d'intersection de A avec la droite de l'infini et son conjugué par rapport aux points que j'ai appelés p, q; les trois points a', a'_1, α' sont en ligne droite (*Géométrie supérieure*, n° 349); ce qui prouve d'abord que A, A′ sont rectangulaires, puisque ces droites passent respectivement par α, α', et ensuite qu'elles sont conjuguées, puisque la conjuguée de A jouit de la propriété de passer par a' et a'_1. Si l'on faisait la perspective, on retomberait sur cette propriété connue, que « *si l'on a un quadrilatère mm′nn′ circonscrit à une conique et une* » *droite* A, *le pôle de cette droite et les points conjugués* » *harmoniques de* $\overline{\mathrm{A}, mm'}$, $\overline{\mathrm{A}, nn'}$, *respectivement par* » *rapport à m, m′ et n, n′, sont en ligne droite,* ou que » *le lieu des pôles d'une droite par rapport à toutes les* » *coniques inscrites dans le même quadrilatère est une* » *droite.* » Il suit de là que *si l'on prend sur un axe deux points a, a′ conjugués harmoniques par rapport aux* *points f, f_1 qui s'y trouvent, un point quelconque de la circonférence décrite sur aa' comme diamètre, jouira de la propriété que, si on le joint à a et a', on aura deux droites conjuguées rectangulaires :* donc, *relativement à l'un quelconque des points désignés par f, f_1, f', f'_1; deux droites conjuguées sont rectangulaires,* puisqu'on peut considérer ces points comme étant des cercles infiniment petits. Ces points remarquables sont appelés les *foyers* de la conique. Il est évident, par ce qui précède, qu'il n'y en a que quatre, et que deux sont réels et deux imaginaires.

Si deux faisceaux en involution sont formés par un angle droit tournant autour de son sommet, leurs rayons doubles font, avec une droite quelconque, des angles dont les tangentes sont $+i$, $-i$ (*Géométrie supérieure,* n° 181). Cette propriété appartient donc aux tangentes à une conique issues de l'un de ses foyers.

Si donc α, β sont les coordonnées d'un foyer d'une conique, les tangentes issues de ce point auront pour équations (les axes étant rectangulaires)

$$(x-\alpha)+(y-\beta)i=0,$$
$$(x-\alpha)-(y-\beta)i=0;$$

l'équation de la conique sera donc de la forme

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+\lambda X^2=0,$$

$X=0$ étant l'équation de la corde des contacts.

Cette propriété remarquable dont jouissent les tangentes à une conique issues de l'un de ses foyers, de faire avec une droite quelconque des angles dont les tangentes sont $+i$ et $-i$, peut servir à déterminer les foyers. Pour cela, il faut chercher l'intersection des axes avec les tangentes, ce qui est facile; car, si l'on prend deux tangentes A, A' symétriques par rapport à un axe, une tangente mobile tracera sur elles deux divisions homographiques qui pourront s'exprimer au moyen d'une équation très-simple; une seconde équation sera fournie par la condition que les tangentes en question font avec la droite A, par exemple, un angle égal à *arc tang i*; les positions des tangentes qui passent par les foyers seront donc bien déterminées par ces deux équations, et en prenant leurs intersections avec l'axe, on aura les foyers; de même pour l'autre axe. On trouve ainsi que, dans l'ellipse et l'hyperbole, les foyers ne sont pas à l'infini, et que dans la parabole, il n'y a qu'un foyer réel non à l'infini.

Si d'un point a on mène à une conique deux tangentes M, M', *et des droites à deux foyers conjugués quelconques, f, f' par exemple, les angles* (M, M'), (af, af_1) *ont même bissectrice.* Car, si on joint le point a aux points p, q, ces deux droites et les quatre autres forment un faisceau en involution; mais les angles (ap, aq), (M, M') ont évidemment même bissectrice; il en est donc de même des angles (af, af_1), (M, M') (*Géométrie supérieure*, n° 247). Il suit de là que *la tangente est également inclinée sur les droites qui joignent le point de contact à deux foyers conjugués.* On en déduit immédiatement que

$$af + af_1 = \text{const.}$$

(a étant un point de la courbe).

Le produit des perpendiculaires abaissées de deux foyers conjugués sur une tangente quelconque est constant. En effet, le produit des distances des points p, q à cette droite est constant, puisqu'il est proportionnel au produit des tangentes des angles que fait la tangente proposée avec les droites qui joignent le point de contact aux points p, q; et dans tout quadrilatère circonscrit à une conique, on sait que le produit des distances d'une tangente à deux sommets opposés est au produit des distances de cette même droite à deux autres sommets opposés, dans un rapport constant.

La propriété que possèdent toutes les coniques confocales d'être tangentes à deux mêmes droites, rend évidente cette proposition, que, *quand on fait tourner autour de son sommet un angle de grandeur constante, les rayons doubles des faisceaux homographiques formés par ses côtés sont toujours les mêmes, quelle que soit la grandeur de l'angle.* Car, soient une conique Σ; f un de ses foyers réels, et (A, A') un angle dont le sommet est en f; si on fait tourner tout le système autour du foyer et d'un angle quelconque, le rapport anharmonique de A, A' et des deux tangentes à la conique ne changera évidemment pas, et les équations de ces dernières droites resteront toujours les mêmes. Le théorème est donc démontré.

Nous avons vu plus haut que toute conique a au moins un foyer réel non à l'infini; il suit de là que *toute conique peut être placée sur un cône à base circulaire.* Car, soient f le foyer de la conique proposée, F sa polaire; que l'on mène par le foyer un plan perpendiculaire à F, et que, dans ce plan, on décrive un cercle dont le centre soit le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur sa polaire, et le rayon la longueur de cette perpendiculaire: d'un point quelconque ω de ce cercle, on verra sous un angle droit le segment compris entre deux points conjugués situés sur p; si on fait la perspective sur un plan parallèle à celui qui passe par ω et F, la courbe obtenue ainsi sera une conique, et comme toutes les droites conjuguées passant par son centre sont rectangulaires, ce sera un cercle.

Il résulte immédiatement de l'équation aux foyers obtenue précédemment, que *la distance d'un point d'une conique à un foyer est une fonction rationnelle, entière* *et du premier degré des coordonnées de ce point*, et que *le rapport de cette distance du même point à la polaire du foyer est le même pour tous les points de la courbe.*

Cette dernière propriété peut se démontrer autrement, et pour cela établissons deux lemmes préliminaires.

« 1°. *Si l'on mène à une conique des tangentes aux » extrémités d'un axe, elles intercepteront sur une tan- » gente quelconque un segment qui sera vu d'un foyer » situé sous un angle droit.* En effet, soient A, A′, a, a', » M, m', f, F les tangentes aux extrémités d'un axe, » leurs points de contact, la tangente mobile, son point » de contact, le foyer, sa polaire; le faisceau obtenu en » joignant le foyer f aux points a, $\overline{A}\,\overline{M}$, m, $\overline{M}\,\overline{F}$ est har- » monique, et les deux droites $f\overline{A}\,\overline{M}$, $f\overline{A}\,\overline{F}$ sont rectan- » gulaires comme conjuguées relatives aux foyers; donc » $f\overline{A}\,\overline{M}$ est bissectrice de l'angle (fa, fm); de même » $f\overline{A'}\,\overline{M}$ est bissectrice de l'angle (fa', fm) : le théorème » est donc démontré, puisque les deux angles sont adja- » cents et supplémentaires. Ce théorème fait voir que, » *dans la parabole, le lieu de la projection du foyer sur » une tangente mobile est la tangente au sommet.*

» 2°. *Si on prend sur l'axe aa' d'une conique un » point γ et la polaire* Γ, *et qu'en γ on élève sur aa' une » perpendiculaire* G, *une tangente quelconque* M *cou- » pera* G *et* Γ *en deux points* $\overline{G}\,\overline{M}$, $\overline{\Gamma}\,\overline{M}$, *tels que l'on » aura*

$$\frac{f,\overline{G}\,\overline{M}}{f,\overline{\Gamma}\,\overline{M}} = \text{const.},$$

» *f étant un foyer situé sur l'axe aa'.* En effet, le fais- » ceau $f\overline{A}\,\overline{M}$, $f\overline{G}\,\overline{M}$, f, $\overline{A'}\,\overline{M}$, f, $\overline{\Gamma}\,\overline{M}$ est harmonique; » mais l'angle des deux droites $f\overline{A}\,\overline{M}$, $f\overline{A'}\,\overline{M}$ est droit

» d'après le lemme précédent; donc $f\overline{A'}\overline{M}$ est bissec-
» trice de l'angle des deux droites $f\overline{M}\overline{G}$, $f\overline{M}\overline{\Gamma}$; par
» conséquent,

$$\frac{\overline{f\overline{M}\overline{G}}}{\overline{f\overline{M}\overline{\Gamma}}} = \frac{\overline{\overline{M}\overline{G},\ \overline{M}\overline{A'}}}{\overline{\overline{M}\overline{\Gamma},\ \overline{M}\overline{A'}}} = \frac{\gamma a'}{g a'} = \text{const.},$$

» g étant le pied de la polaire sur l'axe.

» Cela posé, prenons le foyer f pour le point γ, et
» abaissons du point m une perpendiculaire mp sur F;
» les deux triangles fmp, $\overline{f}\ \overline{GM}\ \overline{FM}$ sont semblables
» comme ayant les angles égaux, puisque le quadrilatère
» $fm\overline{MF}p$ est inscriptible, les angles $(fm, f\ \overline{MF})$,
» (pm, F) étant droits; donc

$$\frac{mf}{mp} = \frac{a'f}{a'g}:$$

» la polaire du foyer est donc la *directrice*. On voit faci-
» lement que, dans la parabole, ce rapport est égal à
» l'unité. »

Problème. — *Faire la perspective* S *d'une conique* Σ, *de telle sorte que les perspectives* f, f_1 *de deux points donnés* φ, φ_1 *dans le plan de* Σ, *soient les foyers de* S.

Construisons le quadrilatère circonscrit à la conique Σ, dont deux sommets opposés sont φ, φ_1; soient π, χ, φ', φ'_1 les deux autres sommets de côtés opposés; soient aussi a, a' deux points conjugués harmoniques par rapport à π, χ: il existe dans le plan Σ, deux points ω, ω_1, d'où l'on voit sous un angle droit tous les segments tels que a, a'. Que l'on décrive sur ω, ω_1 comme diamètre, et dans un plan perpendiculaire au plan Σ une circonférence de cercle, tous ses points jouiront de la même propriété que ω et ω_1: qu'on prenne un de ces points o, et qu'on fasse la perspective sur un plan parallèle au plan $o\pi\chi$, le problème

sera résolu. On peut opérer de la même manière sur φ', φ'_1.
On voit par ce qui précède que le problème est impossible, quand les tangentes menées de l'un des points π, χ à la conique sont réelles et ne coïncident pas; car, dans ce cas, ω, ω_1 sont imaginaires. On voit aussi qu'il y a deux systèmes de solutions (*).

« *Observation.* — Ce problème ne diffère pas de celui-» ci, résolu par M. Chasles : *Faire la perspective d'une » conique, de telle sorte qu'un point devienne un foyer » et qu'une droite passe à l'infini.* La droite en question » est $\pi\chi$. »

Dans toute parabole, la sous-normale est constante. Soient n le pied de la normale au point m, t celuide la tangente, f le foyer, a le sommet, p le pied de la perpendiculaire abaissée de m sur l'axe; np est la sous-normale: les deux points p, f forment sur l'axe deux divisions homographiques, puisqu'ils sont à égales distances du point a; mais les deux points n et f forment aussi deux divisions homographiques, puisqu'ils sont à égales distances du foyer; donc n et p forment aussi deux divisions homographiques : les points doubles de ces divisions coïncident évidemment et sont à l'infini; le théorème est donc démontré. (*Géométrie supérieure*, n° 169.)

Les tangentes menées à la parabole d'un point de la directrice sont rectangulaires. Soient α, M, M', m, m', F, f, A le point donné sur la directrice, les tangentes à la courbe menées de ce point, leurs points de contact, la directrice, le foyer et l'axe : la tangente M est sur fm et sur l'axe; donc elle est la bissectrice de l'angle (F, αf), puisque les côtés de cet angle sont respectivement perpendiculaires aux droites A et fm. Il en est de même pour M', relativement au supplémentaire de l'angle (F, αf); donc, etc.

(*) Comment cette belle solution n'a-t-elle pas attiré l'attention des juges?

Je citerai encore une propriété remarquable des foyers. Soient deux tangentes O, O′ à une conique, et un point extérieur α; si l'on mène une tangente mobile qui coupe O et O′ en m et m', les deux droites αm, $\alpha m'$ forment deux faisceaux homographiques dont les rayons doubles sont les tangentes à la conique issues de α; *donc, si α est un foyer, l'angle $m\alpha m'$ est constant.* Comme dans la parabole, les divisions formées sur les tangentes fixes sont semblables : l'angle constant $m\alpha m'$ est égal à l'angle formé par les tangentes fixes; donc *le cercle circonscrit à un triangle circonscrit à la parabole passe au foyer.*

Cinq conditions sont nécessaires pour déterminer une conique (les centres o, o' des faisceaux générateurs et trois points de la courbe); mais s'il s'agit d'une parabole, quatre suffisent; car on sait que la courbe est tangente à la droite de l'infini.

Note du rédacteur. — Cette pièce a été présentée au grand concours de 1853, et nous regrettons vivement qu'elle ait été écartée de prime abord comme ne rentrant pas dans les termes du programme. Cette composition a un tel cachet de supériorité, qu'elle méritait sinon le premier prix, au moins d'être couronnée hors rang.

Les prix d'honneur viennent enfin d'être *officiellement* publiés. On ne saurait trop applaudir à cette excellente détermination. La composition couronnée en Mathématiques supérieures représente une bonne leçon, fidèlement répétée, nettement rédigée et méritait une honorable distinction. Nos regrets n'en subsistent pas moins. Pourquoi n'avoir pas accordé *deux premiers prix?* et surtout pourquoi n'avoir pas accordé la plus légère approbation au milieu de *huit* accessits, à un travail du premier ordre; travail d'écolier, exécuté dans un temps *limité*, et qui ferait honneur à un professeur?

SÉPARATION DES RACINES D'UNE ÉQUATION ALGÉBRIQUE PAR LA MÉTHODE DES DIFFÉRENCES ;

PAR M. DESBOVES,
Professeur au Lycée Bonaparte.

I.

Le but de cet article est de montrer comment on peut rendre plus expéditive et plus sûre l'application de la méthode des différences au problème de la séparation des racines. Nous ne nous occuperons ici que des équations algébriques, et nous prendrons d'abord pour exemple l'équation

$$x^3 + 11x^2 - 102x + 181 = 0;$$

le tableau (A)

TABLEAU (A).

x	-18	-17		-1	0	1	2	3	4	5
y	-251	180	...	293	181	91	29	1	13	71
Δ	430	352	...	-112	-90	-62	-28	12	58	110
Δ_2	-80	-74	...	22	28	34	40	46	52	58
Δ_3	6	6	...	6	6	6	6	6	6	6

qui met sous les yeux du lecteur les premiers calculs relatifs à la séparation des racines de l'équation proposée, nous permettra de rappeler brièvement la marche ordinairement suivie. On sait qu'après avoir calculé une première ligne verticale contenant les nombres 293, — 112, 22, 6, on forme, vers la droite et vers la gauche du tableau, des lignes de nombres parallèles à la première et qui se déduisent chacune de la précédente. On arrête d'ailleurs le tableau vers la droite et vers la gauche, aux nombres 5 et — 18, à moins que la simple inspection de l'équation n'ait déjà donné des limites préférables; 5 et — 18 sont, en effet, les limites respectives des racines positives et négatives de l'équation, puisque les colonnes verticales correspondant à $x = 3$ et $x = -18$, contiennent, la première, des nombres tous positifs, la seconde, des nombres alternativement positifs et négatifs (*).

Le tableau (A) étant formé, on en déduit un autre tableau (A′) correspondant à des valeurs de x équidistantes d'un dixième; de celui-ci on en déduit un troisième, et ainsi de suite, jusqu'à ce que les racines soient entièrement séparées : telle est la méthode que l'on suit habituellement.

Une première simplification que j'introduis dans la méthode, consiste à remplacer du côté des x positifs le calcul des lignes verticales par le calcul des lignes obliques comme l'indique le tableau (B) :

TABLEAU (B).

x	-1	0	1	2	3	4
y	293	181	91	29	1	13
Δ	-112	-90	-62	-28	12	
Δ_2	22	28	34	40		
Δ_3	6	6	6			

(*) Limite du programme officiel. — Autre limite non formulée dans le programme, mais qui se démontre de même.

Une première ligne oblique formée des nombres 6, 22, — 90, 91 étant calculée à la manière ordinaire, on en déduit la ligne suivante qui contient les nombres 6, 28, — 62, 29, d'après les égalités

$$28 = 22 + 6; \quad -62 = 28 - 90; \quad 29 = 91 - 62;$$

et ainsi de suite.

Le tableau (B) étant construit, on en déduira un tableau (B') de nouvelles lignes obliques correspondant à des valeurs de x équidistantes d'un dixième; du tableau (B') on déduira un tableau (B''), et ainsi toujours de même.

On voit, d'après le tableau (B) comparé au tableau (A), que l'on connaîtra maintenant le résultat de la substitution d'un nombre, 3 par exemple, par le calcul d'un moins grand nombre de différences, et l'on aura d'ailleurs l'avantage d'être conduit par ce calcul à une limite supérieure des racines positives de l'équation plus simple et plus avantageuse que la limite du programme. Nous allons, en effet, démontrer tout à l'heure que les tableaux (B), (B'), etc., sont terminés dès que les nombres écrits dans une ligne oblique sont tous positifs. Ainsi, d'après cette règle, 4 est une limite supérieure des racines positives de l'équation proposée, tandis que nous avions trouvé 5 d'après l'ancienne règle : l'avantage de la nouvelle limite sera, en général, d'autant plus marqué que l'équation sera d'un degré plus élevé.

Si, par exemple, on applique la règle du programme à l'équation

$$x^5 - 10x^3 + 6x + 1 = 0,$$

dont Fourier s'est occupé, on trouve 8 pour limite supérieure des racines positives, tandis que notre règle conduit au nombre 4; il est d'ailleurs facile de voir que notre limite, qui est généralement inférieure à l'autre, ne peut jamais être plus grande; mais je n'insiste pas plus longtemps sur ces détails.

II.

Le théorème que nous proposons de démontrer est une conséquence immédiate de la formule

$$(1)\left\{\begin{aligned} f(x) &= fa + \frac{x-a}{h}\Delta(a-h) + \frac{x-a}{h}\left(\frac{x-a}{h}+1\right)\Delta_2(a-2h)+\ldots \\ &+ \frac{x-a}{h}\left(\frac{x-a}{h}+1\right)\cdots\left(\frac{x-a}{h}+m-1\right)\Delta_m(a-mh), \end{aligned}\right.$$

qui peut remplacer dans tous ses usages la formule ordinaire d'interpolation : elle diffère de cette dernière, comme on voit, par les coefficients des différences et par les différences elles-mêmes. Les différences ne sont plus relatives à une même valeur de la variable x, mais à des valeurs $a-h$, $a-2h,\ldots$, $a-mh$, décroissant suivant la raison d'une progression arithmétique. Il est bien entendu, d'ailleurs, que nous supposons que $f(x)$ est un polynôme entier du degré m, et, par suite, que la différence $(m+1)^{\text{ième}}$ est nulle.

Démonstration de la formule (1). — Nous remarquons d'abord que, par la construction même du tableau (B), chacun des nombres d'une ligne oblique est la somme de tous les nombres de la ligne oblique précédente jusqu'au nombre de même rang que lui. Ainsi, par exemple, la ligne correspondant à $x=1$ ayant été calculée, on a chacun des nombres de la colonne suivante par les inégalités

$$6=6,\quad 28=22+6,\quad -62=-90+22+6,$$
$$29=91-90+22+6.$$

On voit par là que chacune des lignes obliques se déduit de la précédente, comme une ligne horizontale du triangle de Pascal se déduit de celle qui la précède; seulement les nombres de la première ligne oblique ne sont pas égaux à l'unité, comme les nombres de la première ligne horizontale du triangle arithmétique.

Mais si l'on écrit sur une première ligne horizontale $(m+1)$ nombres quelconques P, M, N,..., B, C, A, au-dessous une seconde ligne horizontale déduite de la première d'après la propriété caractéristique du triangle de Pascal que nous venons de rappeler, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait en tout $n+1$ colonnes horizontales, on formera un triangle tout à fait analogue au triangle arithmétique. On voit alors facilement que le $(m+1)^{ième}$ nombre de la $(n+1)^{ième}$ colonne horizontale du nouveau triangle s'obtiendra en multipliant les nombres de la $n^{ième}$ colonne du triangle ordinaire respectivement par A, B, C,..., M, N, P.

En appliquant cette remarque aux tableaux (B), (B'),..., on peut supposer que A, B, C,..., M, N, P représentent respectivement

$$f(a), \quad \Delta(a-h), \quad \Delta_2(a-2h), \ldots, \quad \Delta_m(a-mh),$$

c'est-à-dire les nombres de la ligne oblique correspondant à $x=a$, dans celui des tableaux (B), (B'),..., pour lequel l'intervalle des valeurs de x est égal à h.

Le $(m+1)^{ième}$ nombre de la $(n+1)^{ième}$ colonne oblique est d'ailleurs $f(a+nh)$; on aura donc la formule

$$f(a+nh)=f(a)+n\Delta(a-h)+\frac{n(n+1)}{1.2}\Delta_2(a-2h)+\ldots$$
$$+\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.2.3\ldots m}\Delta_m(a-mh);$$

et si l'on pose

$$a+nh=x,$$

d'où

$$n = \frac{x - a}{h},$$

la formule devient

$$(x) = f(a) + \left(\frac{x-a}{h}\right) \Delta(a-h) + \frac{x-a}{h}\left(\frac{x-a}{h} + 1\right) \Delta_2(a-2h) + \ldots$$
$$+ \frac{(x-a)}{h}\left(\frac{x-a}{h} + 1\right) \cdots \left(\frac{x-a}{h} + m - 1\right) \Delta_m(a - mh),$$

et l'on voit facilement que si l'on y fait successivement

$$x = a, \quad x = a + h, \ldots, \quad x = a + mh,$$

la fonction $f(x)$ prend, en effet, les valeurs correspondantes qu'elle doit avoir. Le second membre de la formule précédente étant égal au polynôme $f(x)$ pour $(m+1)$ valeur de x, lui est complétement identique, la formule d'interpolation (1) est donc démontrée.

Si maintenant, pour une certaine valeur $x = a$, les nombres

$$f(a), \quad \Delta(a-2h), \quad \Delta_2(a-2h), \ldots, \quad \Delta_m(a-mh),$$

c'est-à-dire les nombres d'une ligne oblique, sont des nombres positifs, la formule d'interpolation (1) prouve que pour toute valeur de x égale ou supérieure à a, $f(x)$ restera toujours positive; a est donc une limite supérieure des racines positives de l'équation.

III.

Il faut maintenant montrer comment le tableau que nous avons appelé (B') se déduit du tableau (B).

La question revient à trouver les équations qui lient les δ et Δ des lignes obliques (comme dans le Mémoire de M. Vieille, les δ et Δ correspondent respectivement aux intervalles h et 1).

M. Vieille a trouvé les équations qui lient les δ et Δ des lignes verticales en égalant les coefficients des mêmes puissances de X dans les deux développements identiques

$$f(a+\mathrm{X})=f(a)+\mathrm{X}\frac{\delta}{h}+\frac{\mathrm{X}}{h}\left(\frac{\mathrm{X}}{h}-1\right)\frac{\delta_2}{1.2}$$
$$+\frac{\mathrm{X}}{h}\left(\frac{\mathrm{X}}{h}-1\right)\left(\frac{\mathrm{X}}{h}-2\right)\frac{\delta_3}{1.2.3}+\ldots,$$

$$f(a+\mathrm{X})=f(a)+\mathrm{X}\Delta+\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)\frac{\Delta_2}{1.2}$$
$$+\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)\frac{\Delta_3}{1.2.3}+\ldots;$$

mais si nous posons $x-a=\mathrm{X}$ dans notre formule d'interpolation, il viendra

$$f(a+\mathrm{X})=f(a)+\mathrm{X}\frac{\delta}{h}+\frac{\mathrm{X}}{h}\left(\frac{\mathrm{X}}{h}+1\right)\frac{\delta_2}{1.2}$$
$$+\frac{\mathrm{X}}{h}\left(\frac{\mathrm{X}}{h}+1\right)\left(\frac{\mathrm{X}}{h}+2\right)\frac{\delta_3}{1.2.3};$$

si, de plus, on fait $h=1$, on aura

$$f(a+\mathrm{X})=f(a)+\mathrm{X}\Delta+\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)\frac{\Delta_2}{1.2}$$
$$+\frac{\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)}{1.2.3}\frac{\Delta_3}{1.2.3}+\ldots$$

[pour plus de simplicité dans l'écriture, nous avons supprimé les indices $(a-h)$, $(a-2h)$,..., dans les deux derniers développements].

La méthode de M. Vieille donnera encore les équations entre les nouveaux δ et Δ par l'identification des coefficients des mêmes puissances de x dans les deux derniers développements; mais on remarque que ces deux derniers développements se déduisent des deux précédents par le changement de X en $-$X, et par le changement de signe des δ et Δ d'indice impair. On voit ainsi que les premières relations entre les δ et Δ donneront immédiatement les secondes par le simple changement de signe des coefficients des δ et Δ dont l'indice est impair; il est dès lors permis de dire que la méthode que nous proposons ne conduit à aucun calcul nouveau, les nouvelles équations étant connues par cela même que les autres le sont, et réciproquement.

IV.

Dans le paragraphe précédent, notre but était plutôt d'arriver à la conclusion que nous venons d'énoncer que d'indiquer un moyen simple de former les équations entre les δ et les Δ.

Mais nous allons maintenant donner une règle pratique très-commode pour écrire immédiatement ces équations.

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de séparer les racines d'une équation du quatrième degré, et soit proposé, par exemple, de trouver les relations entre les δ et les Δ des lignes obliques.

Les quatre équations seront

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\delta}{1}+\dfrac{\delta_2}{2}+\dfrac{\delta_3}{3}+\dfrac{\delta_5}{4}=h\left(\dfrac{\Delta}{1}+\dfrac{\Delta_2}{2}+\dfrac{\Delta_3}{3}+\dfrac{\Delta_4}{4}\right), \\ \delta_2+\delta_3+\dfrac{11}{12}\delta_4=h^2\left(\Delta_2+\Delta_3+\dfrac{11}{12}\Delta_4\right), \\ \delta_3+\dfrac{3}{2}\delta_4=h^3\left(\Delta_3+\dfrac{3}{2}\Delta_4\right), \\ \delta_4=h^4\Delta_4\,; \end{array}\right.$$

le premier membre de la première équation s'obtient en divisant δ, δ_2, δ_3, δ_4 respectivement par leurs indices, et faisant la somme des quotients.

Pour avoir le premier membre de la seconde équation, on fait une opération analogue à celle de la multiplication abrégée des nombres ; on multiplie

$$\frac{\delta}{1} + \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_3}{3} + \frac{\delta_4}{4}$$

par

$$\frac{\delta_3}{3} + \frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta}{1},$$

en commençant chaque produit partiel au terme du multiplicande qui est au-dessus du terme du multiplicateur. On ajoute, d'ailleurs, les indices comme s'ils représentaient des exposants. Le calcul est indiqué ci-dessous :

$$\begin{array}{r|r|l}
\delta_2 + \frac{1}{2} & \delta_3 + \frac{1}{3} & \delta_4 ; \\
+ \frac{1}{2} & + \frac{1}{4} & \\
 & + \frac{1}{3} & \\
\hline
\end{array}$$

$$\delta_2 + \delta_3 + \frac{11}{12}\delta_4 ;$$

pour avoir le premier membre de la troisième équation, on multiplie, suivant la règle précédente,

$$\delta_2 + \delta_3 + \frac{11}{12}\delta_4$$

par

$$\frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta}{1} :$$

et ainsi de suite.

Les équations (α) montrent, d'ailleurs, comment on peut écrire immédiatement les seconds membres quand les premiers sont calculés.

Les équations entre les δ et Δ des lignes verticales s'obtiendraient par un procédé analogue, ou, si les équations (α) étaient déjà formées, on les déduirait des équations (α) par la règle que nous avons précédemment donnée.

La règle pratique que nous venons de démontrer est la conséquence immédiate de la formule symbolique

$$h^n f^n(x) = [-l(1-\Delta)]^n,$$

dans laquelle $f^n(x)$ est la $n^{ième}$ dérivée d'une fonction quelconque de x, et l la lettre qui indique un logarithme népérien. Après avoir développé la $n^{ième}$ puissance du logarithme népérien de $(1-\Delta)$, et remplacé les exposants par des indices, on a une formule qui fait connaître les dérivées de la fonction au moyen des différences des lignes obliques. La formule s'applique en particulier aux fonctions algébriques en considérant comme nulles les différences d'indice supérieur au degré m de la fonction. Elle n'avait pas, je crois, encore été remarquée. Elle est, du reste, analogue à la formule connue de Lagrange

$$h^n f^n(x) = [l(1+\Delta)]^n,$$

dans laquelle les Δ sont les différences des lignes verticales. Les deux formules se démontrent, d'ailleurs, d'une manière à peu près semblable.

Remarquons en passant que notre formule donne une nouvelle démonstration du théorème de limite démontré au § II, si l'on s'appuie sur le théorème bien connu de Newton. On généralise ainsi la démonstration que M. Fournier-Vanson avait crue applicable seulement aux équations du troisième et du quatrième degré.

V.

Ordinairement, après avoir trouvé les équations entre les δ et les Δ, on les résout par rapport à δ, δ_2, δ_3,..., et c'est sous la nouvelle forme qu'on les applique; mais si l'on remarque que les équations (α), telles qu'on les a trouvées d'abord, sont toutes préparées pour le calcul, puisque la dernière ne contient que δ_4, l'avant-dernière δ_4 et δ_3, et ainsi de suite, on voit que la substitution d'une forme à l'autre ne présente guère d'avantage; mais je dis qu'il importe, au contraire, de conserver aux équations leur forme primitive.

En effet, la formule

$$f(a+\mathrm{X}) = f(a) + f'(a)\frac{\mathrm{X}}{1} + f''a\frac{\mathrm{X}^2}{1.2} + \ldots,$$

démontrée dans les cours d'algèbre, étant rapprochée de l'une quelconque des quatre formules d'interpolation écrites au § III, montre que les derniers membres des équations tels que (α) sont, pour une valeur $x = a$, de même signe respectivement que $f(a)$, $f'(a), \ldots, f^m(a)$. Mais d'après le théorème de Fourier, les deux successions de signes que présente la suite des fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x), \ldots$, pour deux nombres a et b, donnent une limite supérieure du nombre des racines de l'équation comprises entre a et b; on devra donc, pour procéder régulièrement à la séparation des racines, voir quels sont les signes des seconds membres des équations tels que (α) (*); le théorème de Fourier pourra alors indiquer des intervalles où il est inutile de chercher des racines, et le calcul se trouvera abrégé de beaucoup.

Lorsque, par la considération directe de l'équation ou la discussion du problème qui y a conduit, on saura que l'équation a toutes ses racines réelles et inégales, ou que, du moins, ce qui arrive le plus souvent, on connaîtra leur nombre, on sera conduit sûrement et de la manière la plus rapide à la séparation des racines.

Nous avons supposé, dans notre travail, que l'équation proposée était algébrique, mais on voit bien que la méthode peut s'étendre aux équations transcendantes.

La méthode des différences, telle que nous l'avons mo-

(*) Si les signes correspondant à un nombre a sont tous positifs, a sera une limite supérieure des racines positives. On peut, du reste, démontrer que cette limite a (supposée entière pour plus de simplicité) ne peut jamais être inférieure de plus de $(m-1)$ unités à la limite du programme et à plus forte raison à celle que nous avons fait connaître.

difiée, a beaucoup d'analogie avec la méthode de Budan; mais nous la préférons à cette dernière à cause de la régularité et de l'uniformité des opérations, et surtout à cause de sa facile extension aux équations transcendantes.

Nota. La formule d'interpolation que nous avons démontrée § II est comprise dans une formule plus générale donnée par Laplace dans son *Calcul des Probabilités*. Cette formule est la suivante :

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{h}\Delta(a-rh)$$
$$+\left(\frac{x-a}{h}\right)\left(\frac{x-a}{h}+2r-1\right)\Delta_2(a-2rh)$$
$$+\left(\frac{x-a}{h}\right)\left(\frac{x-a}{h}+3r-1\right)\left(\frac{x-a}{h}+3r-2\right)\Delta_3(a-3rh)+\ldots$$

En y faisant $r=1$, on retrouve notre formule.

J'ai démontré, du reste, la formule de Laplace à l'aide du triangle arithmétique, comme je l'ai fait pour la formule particulière.

SUR LES FONCTIONS DE STURM;

Par M. Brioschi (F.),
Professeur à l'Université de Padoue.

On appelle généralement *fonctions de Sturm*, les résidus que l'on obtient en appliquant la méthode du célèbre auteur à la recherche du nombre des racines réelles d'une équation algébrique. Il y a déjà quelques années que M. Sylvester a donné *sans démonstration* (*voir* t. XI, p. 403) des formules qui représentent ces fonctions par des expressions formées avec les racines de ces équations. Ces formules ont été démontrées depuis par M. Sturm (Journal de M. Liouville, t. VII). Partant de ces formules, MM. Cayley et Borchardt sont parvenus à mettre ces formules sous la forme de *déterminants des puissances* des racines de l'équation (Journal de M. Liouville, t. XI et XII). Enfin, M. Cayley, en faisant usage de *moyens indirects*, a représenté ces fonctions au moyen des coefficients de l'équation (Journal de M. Liouville, t. XIII, p. 269; 1848). Le but de cette Note est de parvenir *directement* à des formules analogues à celles de M. Cayley.

Note du Rédacteur. Nous croyons nécessaire de faire précéder ce beau travail de quelques lemmes sur les déterminants.

1. *Lemme.* Dans un déterminant, si l'on rend identiques deux colonnes ou deux lignes, le déterminant s'annule.

2. *Lemme.* En multipliant par la même quantité tous les termes d'une même colonne ou d'une même ligne, le nouveau déterminant est égal au premier multiplié par cette quantité.

3. *Lemme.*

$$\begin{vmatrix} a_1+\alpha_1, & b_1, & c_1 \\ a_2+\alpha_2, & b_2, & c_2 \\ a_3+\alpha_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_1, & b_1, & c_1 \\ \alpha_2, & b_2, & c_2 \\ \alpha_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ce lemme existe pour un déterminant quelconque, et est une conséquence immédiate du théorème de Taylor.

1^er^ *Corollaire.* Faisant les α égaux aux b, on a, en vertu du premier lemme,

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1, & b_1, & c_1 \\ a_2+b_2, & b_2, & c_2 \\ a_3+b_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

2^e^ *Corollaire.*

$$\begin{vmatrix} a_1+mb_1, & b_1, & c_1 \\ a_2+mb_2, & b_2, & c_2 \\ a_3+mb_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

La proposition est une conséquence du précédent corollaire, lorsque m est un nombre entier positif; et comme il s'agit d'une *identité*, il s'ensuit que la proposition est vraie pour une valeur quelconque de m.

3^e *Corollaire.*

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 + ma_1, & c_1 + mb_1 + na_1 \\ a_2, & b_2 + ma_2, & c_2 + mb_2 + na_2 \\ a_3, & b_3 + ma_3, & c_3 + mb_3 + na_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1, & b_1, & c_1 \\ a_2, & b_2, & c_2 \\ a_3, & b_3, & c_3 \end{vmatrix}.$$

Conséquence du précédent corollaire.

1. Soit

$$\varphi(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

l'équation proposée; et soient $\varphi_1(x)$ la dérivée du polynôme $\varphi(x)$, et $\varphi_2(x)$, $\varphi_3(x)$,..., les résidus obtenus par la méthode de M. Sturm. Nous aurons

$$\varphi_2 = \varphi_1 q_1 - \varphi; \quad \varphi_3 = \varphi_2 q_2 - \varphi_1, \ldots; \quad \varphi_r = \varphi_{r-1} q_{r-1} - \varphi_{r-2};$$

et de là

$$\varphi_2 = \varphi_1 D_1 - \varphi N_1; \quad \varphi_3 = \varphi_1 D_2 - \varphi N_2, \ldots, \quad \varphi_r = D_{r-1} - \varphi N_{r-1};$$

$$\frac{N_1}{D_1}, \quad \frac{N_2}{D_2}, \ldots, \quad \frac{N_{r-1}}{D_{r-1}}$$

étant les réduites successives de la fraction continue

$$\cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3 - \ldots,}}}$$

où q_1, q_2, q_3,... sont les quotients du premier degré en x.

Les deux équations

$$\varphi_{r-1} = \varphi_1 D_{r-2} - \varphi N_{r-2},$$
$$\varphi_r = \varphi_1 D_{r-1} - \varphi N_{r-1}.$$

donnent, ayant égard à ce que $N_{r-1}D_{r-2}-N_{r-2}D_{r-1}=1$,

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_{r-1}D_{r-1}-\varphi_r D_{r-2};\\ \varphi_1 &= \varphi_{r-1}N_{r-1}-\varphi_r N_{r-2},\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}&\varphi_r \quad \text{est de degré } n-r,\\ &D_{r-1} \text{ est de degré } r-1,\\ &N_{r-1} \text{ est de degré } r-2.\end{aligned}$$

Faisons

$$\begin{aligned}\varphi_{(r-1)} &= A_{r-1}x^{n-r+1}+\ldots,\\ N_{r-1} &= b_{r-2}x^{r-2}+\ldots,\\ D_{r-1} &= c_{r-1}x^{r-1}+\ldots;\end{aligned}$$

donc la valeur de φ donne

$$A_{r-1}c_{r-1}=1;$$

mais

$$q_1=\frac{1}{n}x.$$

et pour avoir le plus haut terme de D_{r-1}, il faut multiplier le plus haut terme de N_{r-1} par q_1; donc, ainsi

$$b_{r-2}=nc_{r-1},$$

(1) $$c_{r-1}=\frac{1}{A_{r-1}}.\qquad b_{r-2}=\frac{n}{A_{r-1}};$$

c_{r-1} et b_{r-2} ont donc les mêmes signes; ainsi les trois séries

$$\begin{matrix}\varphi, & \varphi_1, & \varphi_2,\ldots, & \varphi_{r-1}, & \varphi_r,\\ 1, & D_1, & D_2,\ldots, & D_{r-1}, & D_r,\\ 0, & 1, & N_2,\ldots, & N_{r-1}, & N_r,\end{matrix}$$

lorsqu'on y fait $x=+\infty$, présentent les mêmes successions de permanences et de variations; de même en y faisant $x=-\infty$.

Ce sont des séries *signaleticamente equivalenti.*

2. Soient $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$ les n racines de l'équation

$$\varphi(x)=0.$$

Si l'on substitue une quelconque de ces racines, soit α_s, dans l'identité

$$\varphi_{(r)} = \varphi_1 D_{r-1} - \varphi N_{r-1},$$

on obtient

$$\varphi_r(\alpha_s) = \varphi_1(\alpha_s) D_{r-1}(\alpha_s);$$

par les formules connues de la décomposition des fractions, on a

$$\sum_1^n \frac{\varphi_r(\alpha_s)}{\varphi_1(\alpha_s)} = 0, \qquad \sum_1^n \frac{\alpha_s \varphi_r(\alpha_r)}{\varphi_1(\alpha_s)} = 0, \ldots,$$

$$\sum_1^n \frac{(\alpha_s)^{r-2} \varphi_r(\alpha_s)}{\varphi_1(\alpha_s)} = 0, \quad \sum_1^n \frac{(\alpha_s)^{r-1} \varphi_r(\alpha_s)}{\varphi_1(\alpha_s)} = A_r,$$

où A_r est le coefficient de x^{n-r} dans la fonction $\varphi_r(x)$. Donc

$$\sum_1^n D_{r-1}(\alpha_s) = 0, \qquad \sum_1^n \alpha_s D_{r-1}(\alpha_s) = 0, \ldots,$$

$$\sum_1^n (\alpha_s)^{r-2} D_{r-1}(\alpha_s) = 0, \quad \sum_1^n (\alpha_s)^{r-1} D_{r-1}(\alpha_s) = A_r;$$

faisons

$$(2) \qquad D_{r-1}(\alpha_s) = c_{r-1}\alpha^{r-1} + c_{r-2}\alpha^{r-2} + \ldots + c_1\alpha + c_0$$

et

$$s_m = \alpha_1^m + \alpha_2^m + \ldots + \alpha_n^m = \sum_1^n (\alpha_s)^m;$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
c_0 s_0 + c_1 s_1 + \ldots + c_{r-1} s_{r-1} &= 0,\\
c_0 s_1 + c_1 s_2 + \ldots + c_{r-1} s_r &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
c_0 s_{r-2} + c_1 s_{r-1} + \ldots + c_{r-1} s_{2r-3} &= 0,\\
c_0 s_{r-1} + c_1 s_r + \ldots + c_{r-1} s_{2r-2} &= A_r;
\end{aligned}$$

posons

$$\Delta_r = \begin{vmatrix}
s_0, & s_1, \ldots, & s_{r-1}\\
s_1, & s_2, \ldots, & s_r\\
\ldots & \ldots\ldots & \ldots\\
s_{r-2}, & s_{r-1}, \ldots, & s_{2r-3}\\
s_{r-1}, & s_r, \ldots, & s_{2r-2}
\end{vmatrix};$$

on a, en résolvant les équations,

$$c_0 = \frac{A_r}{\Delta_r}\frac{d.\Delta_r}{ds_{r-1}};\quad c_1 = \frac{A_r}{\Delta_r}\frac{d.\Delta_r}{ds_r},\ldots;\quad c_{r-1} = \frac{A_r}{\Delta_r}\frac{d.\Delta_r}{ds_{2r-2}};$$

et ayant égard aux équations (2) et (1), l'on a

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} D_{r-1} = \dfrac{A_r}{\Delta_r} \\ \times\left[\dfrac{d.\Delta_r}{ds_{2r-2}}x^{r-1} + \dfrac{d.\Delta_r}{ds_{2r-3}}x^{r-2} + \ldots + \dfrac{d.\Delta_r}{ds_r}x + \dfrac{d.\Delta_r}{ds_{r-1}}\right], \end{array}\right.$$

$$\frac{A_r}{\Delta_r}\frac{d.\Delta_r}{ds_{2r-2}} = \frac{1}{A_{r-1}};$$

d'où

$$A_r = \frac{1}{A_{r-1}}\cdot\frac{\Delta_r}{\Delta_{r-1}};\qquad \text{car}\quad \Delta_{r-1} = \frac{d.\Delta_r}{ds_{2r-2}};$$

et comme

$$A_1 = n = \Delta_1 = s_0,$$

on aura, pour r pair,

$$A_r = \frac{(\Delta_2\Delta_4\ldots\Delta_{r-2})^2}{(\Delta_1\Delta_3\ldots\Delta_{r-1})^2}\Delta_r;$$

et pour r impair,

$$A_r = \frac{(\Delta_1\Delta_3\ldots\Delta_{r-2})^2}{(\Delta_2\Delta_4\ldots\Delta_{r-1})^2}\Delta_r;$$

ainsi le signe de A_r dépend de Δ_r; c'est ce qui constitue le théorème de M. Borchardt (Journal de M. Liouville, tome XII, page 58), et au moyen de l'équation (3), on a la valeur de D_{r-1} en fonction des puissances des racines.

3. *Calcul de* A_r. Calculons maintenant A_r en fonction des *coefficients* de l'équation; pour fixer les idées, prenons $r = 4$; alors

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ s_2, & s_3, & s_4, & s_5 \\ s_3, & s_4, & s_5, & s_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ 0, & s_0, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ s_0, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4, & s_5 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4, & s_5, & s_6 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons la deuxième colonne à la première multipliée par a_1, on a les six termes

$$(a)\quad \begin{cases} 0 + a_1.1; & 1 + a_1.0; & 0 + a_1.0; \\ s_0 + a_1.0; & s_1 + a_1.s_0; & s_2 + a_1.s_1; \end{cases}$$

ajoutons la troisième colonne à la deuxième, multipliée par a_1, et à la première multipliée par a_2, on a les six termes

$$(b)\begin{cases} 0 + a_1.0 + a_2.1; & 0 + a_1.1 + a_2.0; & s_0 + a_1.0 + a_2.0; \\ s_1 + a_1.s_0 + a_2.0; & s_2 + a_1.s_1 + a_2.s_0; & s_3 + a_1.s_2 + a_2.s_1; \end{cases}$$

de même

$$(c)\begin{cases} 0 + a_1.0 + a_2.0 + a_3.1; \quad 0 + a_1.0 + a_2.1 + a_3.0; \\ \qquad s_1 + a_1.s_0 + a_2.0 + a_3.0, \text{ etc.}; \end{cases}$$

et, en vertu du troisième corollaire, et des relations connues entre les puissances des racines et les coefficients de l'équation, on a

$$\Delta_1 = -\begin{vmatrix} 1, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & a_5 \\ 0, & 1, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ 0, & 0, & n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3 \\ 0, & n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3, & (n-4)a_4 \\ n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3, & (n-4)a_4, & (n-5)a_5 \\ a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4, & 5a_5, & 6a_6 \end{vmatrix}.$$

La première colonne est la même que celle de la première expression de D_4; la deuxième colonne est la ligne (b); la troisième colonne est la ligne (c), etc.; la loi de formation est évidente.

Ainsi, on a A_1, et par conséquent A_4, et en général A_r, en fonction des coefficients de l'équation.

4. *Calcul de* D_r. On peut, du reste, obtenir de la même manière D_{r-1} en fonction des coefficients de l'é-

quation. En effet, on a, par exemple, pour $r = 3$,

$$D_2 = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^2 \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2 \\ s_1, & s_2, & s_3 \\ 1, & x, & x^2 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^2 \begin{vmatrix} s_0, & s_1 + a_1 s_0, & s_2 + a_1 s_1 + a_2 s_0 \\ s_1, & s_2 + a_1 s_1, & s_3 + a_1 s_2 + a_2 s_0 \\ 1, & x + a_1, & x^2 + a_1 x + a_2 \end{vmatrix}$$

$$= -\left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\right)^2 \begin{vmatrix} n, & (n-1)\,a_1, & (n-2)\,a_2 \\ a, & 2a_2, & 3a_3 \\ 1, & x + a_1, & x^2 + a_1 x - a_2 \end{vmatrix};$$

or

$$\Delta_1 = s_0 = n;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 \\ s_1, & s_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_0, & s_1 + a_1 s_0 \\ s_1, & s_2 + a_1 s_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} n, & (n-1)a_1 \\ a_1, & 2a_2 \end{vmatrix}.$$

5. *Calcul de* φ_r. Les fonctions de Sturm peuvent, par le même procédé, s'exprimer facilement en fonction des coefficients de l'équation. La théorie de la décomposition des fractions rationnelles donne

$$\frac{\varphi_r(x)}{\varphi x} = \sum_1^n \frac{\varphi_r(\alpha_s)}{(x-\alpha_s)\,\varphi_1(\alpha_s)} = \sum_1^n \frac{D_{r-1}(\alpha_s)}{x-\alpha_s} \quad (\S\ 2).$$

Faisons

$$u_m = \frac{\alpha_1^m}{x-\alpha_1} + \frac{\alpha_2^m}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{\alpha_n^m}{x-\alpha_n},$$

donc

$$\frac{\Delta_r}{\Delta_r}\,\frac{\varphi_r(x)}{\varphi(x)} = \begin{vmatrix} s_0, & s_1, \ldots, & s_{r-1} \\ s_1, & s_2, \ldots, & s_r \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{r-2}, & s_{r-1}, \ldots, & s_{2r-3} \\ u_0, & u_1, \ldots, & u_{r-1} \end{vmatrix} \quad (v.\ \text{éq. } 3);$$

or

$$u_m = x u_{m-1} - s_{m-1} \quad \text{et} \quad u_0 = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)};$$

donc on obtient, par substitutions successives,

$$\varphi(x)\, u_m = x^m\, \varphi_1(x) - f_{m-1}(x)\, \varphi x, \tag{4}$$

où

$$f_{(m-1)}(x) = x^{m-1} s_0 + x^{m-2} s_1 + \ldots + x\, s_{m-2} + s_{m-1};$$

l'équation (4) donne

$$(a)\left\{\begin{array}{l} \quad \varphi(x)[u_m + a_1 u_{m-1} + a_2 u_{m-2} + \ldots + a_m u_0] \\ = \varphi_1 x\, [x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m] \\ - \varphi(x)[n x^{m-1} + (n-1) a_1 x^{m-2} + \ldots + (n-m+1) a_{m-1}]. \end{array}\right.$$

Faisons, par exemple, $r = 4$, on a (*voir* ci-dessus)

$$\frac{\varphi_4 x}{\varphi(x)} = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1 \Delta_3}\right)^2 \begin{vmatrix} s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ s_2, & s_3, & s_4, & s_5 \\ u_0, & u_1, & u_2, & u_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1 \Delta_3}\right)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0, & s_0, & s_1, & s_2, & s_3 \\ s_0, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4 \\ s_1, & s_2, & s_3, & s_4, & s_5 \\ 0, & u_0, & u_1, & u_2, & u_3 \end{vmatrix};$$

procédant par la même méthode de multiplication suivie plus haut, et ayant égard à l'équation (a), on obtient

$$\varphi_4(x) = -\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1 \Delta_3}\right)^2 \begin{vmatrix} 1, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ 0, & n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3 \\ n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3, & (n-4)a_4 \\ a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4, & 5a_5 \\ 0, & \varphi_1 x, & \nu_1, & \nu_2, & \nu \end{vmatrix},$$

où

$$\begin{aligned} \nu_1 &= (x + a_1)\varphi_1 x - n\varphi(x), \\ \nu_2 &= (x^2 + a_1 x + a_2)\,\varphi_1(x) - [nx + (n-1)a_1]\,\varphi(x), \\ \nu_3 &= [x^3 + a_1 x_2 + a_2 x + a_3]\,\varphi_1(x) \\ &\quad - [nx^2 + (n-1)a_1 x + (n-2)\,a_2]\,\varphi(x). \end{aligned}$$

6. *Calcul de* N_r. Soit, par exemple, $r = 4$; ayant

égard au lemme (§ 2), on a

$$\varphi_4(x) = -\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1\Delta_3}\right)^2 \begin{vmatrix} 1, & a_1, & a_2, & a_3 & a_4 \\ 0, & n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3 \\ n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3, & (n-4)a_4 \\ a_1, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4, & 5a_5 \\ 0, & \varphi_1(x), & (x+a_1)\varphi_1(x), & (x^2+a_1x+a_2)\varphi_1(x), & (x^3+a_1x_2+a_2x+a_3)\varphi_1(x) \end{vmatrix}$$

$$+\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1\Delta_3}\right)^2 \begin{vmatrix} 1, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4 \\ 0, & n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3 \\ n, & (n-1)a_1, & (n-2)a_2, & (n-3)a_3, & (n-4)a_4 \\ a, & 2a_2, & 3a_3, & 4a_4, & 5a_5 \\ 0, & 0, & n\varphi(x), & [nx+(n-1)a_1]\varphi(x), & [nx^2+(n-1)a_1x+(n-2)a_2]\varphi(x) \end{vmatrix}.$$

Dans le premier déterminant, divisant tous les termes de la dernière ligne par $\varphi_1(x)$, le nouveau déterminant est D_3 (§ 4); dans le deuxième déterminant, divisant tous les termes de la dernière ligne par $\varphi(x)$, on obtient un déterminant que je désigne par P; ainsi

$$\varphi_4 x = D_3\varphi_1(x) + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1\Delta_3}\right)^2 \varphi(x).P;$$

or

$$N_3\varphi(x) = D_3\varphi_1(x) - \varphi_4(x) \quad (\S\ 2),$$

donc

$$N_3 = -\left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1\Delta_3}\right)^2 P;$$

la loi de formation se voit facilement.

Note. Le savant analyste a trouvé aussi la valeur générale de N_r, celle des quotients et des relations entre ces valeurs que nous insérerons prochainement, ainsi qu'un beau travail de M. Sylvester sur ces valeurs et ces relations, lors même que $\varphi_1(x)$ n'est pas la dérivée de $\varphi(x)$.

RÉSOLUTION GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES;

MÉTHODE GRÄFFE;

D'APRÈS M. ENCKE,
Professeur, directeur de l'Observatoire, secrétaire de l'Academie des Sciences de Berlin.

(Journal de M. Crelle, t. XXII, p. 193; 1851.)

L'Académie des Sciences de Berlin avait proposé pour question la résolution générale des équations numériques. Le prix fut remporté par M. Gräffe, professeur à Zurich. Le Mémoire couronné a paru sous ce titre : *Die auflösung der höheren numerischen Gleichungen, als beantwortung einer von der Königl. Akad. de Wiss. zu Berlin aufgestellten Preisfrage;* Zurich, 1837 : Résolution des équations numériques supérieures; réponse à une question proposée par l'Académie royale des Sciences de Berlin.

Dans cet ouvrage, l'auteur forme une seconde équation dont les racines sont des puissances *très-élevées* des racines de l'équation *donnée*, et les coefficients de cette seconde équation servent à faire connaître simultanément toutes les racines réelles et tous les modules des racines imaginaires, et l'on montre aussi la manière la plus simple de former cette seconde équation.

Cette nouvelle méthode de résolution se recommande à un haut degré, par la généralité, la rigueur et la brièveté. Elle est directe, n'ayant besoin d'aucune autre espèce d'essai; elle ne conduit jamais à des équations plus élevées que la proposée, et, d'après un procédé toujours le même, n'exige jamais de calculs impraticables. La nature des racines, le nombre des imaginaires, ne sont pas des obstacles; elle donne toujours des résultats que la plus simple substitution permet de contrôler. Ce procédé est tellement court, qu'on peut déterminer toutes les racines d'une équation du septième degré ayant six racines imaginaires, dans l'espace de deux à trois heures, avec l'approximation que permettent des logarithmes à sept décimales.

Le Mémoire de M. Encke, auquel appartient l'appréciation précédente du travail de M. Gräffe, en fait une nouvelle exposition et le complète, en ce sens qu'il indique les moyens : 1° de calculer, non les modules, mais les racines imaginaires mêmes, par une méthode simple et rigoureuse; 2° de faciliter les procédés lorsque, les racines étant très-rapprochées, des puissances élevées ne suffisent pas pour les séparer suffisamment; 3° d'approcher des véritables valeurs, avec un degré quelconque d'approximation.

1. Problème. *Former l'équation aux carrés des racines d'une équation donnée.*

Solution. Soit l'équation

$$(1) \qquad x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = 0, \qquad (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3, \ldots,\ \alpha_n).$$

Faisant $x^2 = y$, les termes de degré pair ne renferment que y, et les termes de degré impair renferment encore $\sqrt{y}$; faisant disparaître le radical, on obtient

$$(2) \quad \left| \begin{array}{r|r|r|r|l} y^n - A_1^2 & y^{n-1} + A_2^2 & y^{n-2} - A_3^2 & y^{n-3} + A_4^2 & y^{n-4} + \ldots = 0. \\ + 2A_2 & - 2A_1A_3 & + 2A_2A_4 & - 2A_3A_5 & \\ & + 2A_4 & - 2A_1A_5 & + 2A_2A_6 & \\ & & + 2A_6 & - 2A_1A_7 & \\ & & & + 2A_8 & \end{array} \right.$$

La loi de formation est évidente.

Corollaire. En suivant la même loi, on peut former, avec l'équation (2), une troisième équation dont les racines sont les quatrièmes puissances des racines de l'équation (1), et en continuant de même, on peut parvenir à une équation ayant pour racines la puissance d'indice 2^p des racines de la proposée; p est un nombre entier positif.

Premier cas : *Toutes les racines sont réelles.*

Les équations aux puissances paires des racines, n'ayant que des racines positives, ne présentent que des *variations.*

Soit donc l'équation suivante, celle des racines élevées à la puissance $2^p = q$,

$$x^n - P_1 x^{n-1} + P_2 x^{n-2} + \ldots + (-1)^n P_n = 0;$$

donc

$$P_1 = \alpha_1^q + \alpha_2^q + \ldots + \alpha_n^q,$$

$$P_2 = \alpha_1^q \alpha_2^q + \ldots + \alpha_{n-1}^q \alpha_n^q,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P_n = (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)^q.$$

Supposons que les racines α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ soient rangées par ordre décroissant de grandeur *absolue;* il est évident que q allant en croissant, on pourra enfin négliger les valeurs de α_2^q, $\alpha_3^q, \ldots$, relativement à α_1^q, et l'on aura

$$P_1 = \alpha_1^q;$$

d'où, pour une première approximation,

$$\alpha_1 = \sqrt[q]{P_1};$$

le signe se détermine facilement d'après les *limites* connues des racines positives et négatives.

On aura, par la même raison,

$$P_2 = \alpha_1^q \alpha_2^q,$$

d'où

$$\alpha_2 = \frac{\sqrt[q]{P_2}}{\alpha_1}:$$

ce qui donne une valeur approchée de α_2, et ainsi pour les autres racines.

Pour connaître la valeur de q qui permet de négliger dans chaque coefficient P_r, tous les termes en comparaison du premier, il faut calculer le même coefficient P'_r pour une valeur $q' > q$; on devra avoir sensiblement

$$\sqrt[q]{P_r} = \sqrt[q']{P'_r}, \qquad \frac{\log P_r}{\log P'_r} = \frac{q}{q'}:$$

lors donc que les logarithmes des deux coefficients des mêmes puissances dans les deux équations correspondantes à q et q', sont sensiblement dans le même rapport que ces puissances, on peut s'en tenir au premier terme dans chaque coefficient. Ce même critérium subsiste si, au lieu de procéder par *carrés* comme ci-dessus, on procédait par *cubes*.

Voyons combien il faudra d'opérations, en allant par carrés : soient $(\alpha_1 \alpha_2)^q$, $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^q$, $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^q$, $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5)^q$, $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6)^q$ (*) cinq coefficients consécutifs; dans l'équation suivante, le coefficient de la même puissance de l'inconnue que $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^q$ dans la précédente, sera

$$(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)^{2q} - 2\alpha_1^{2q} \alpha_2^{2q} \alpha_3^{2q} \alpha_4^q \alpha_5^q + 2\alpha_1^{2q} \alpha_2^{2q} \alpha_3^q \alpha_4^q \alpha_5^q \alpha_6^q,$$

(*) Les parenthèses représentent des sommes.

en ne prenant que les termes qui fournissent les plus grands produits; pour que ce terme se réduise au premier, à la cinquième décimale près, il faut que l'on ait

$$(x_1 x_2 x_3 x_4)^{2q} > 200000\, x_1^{2q} x_2^{2q} x_3^{2q} x_4^{q} x_5^{q}:$$

d'où

$$q > \frac{5,30103}{\log \frac{x_4}{x_5}}.$$

De là pour

$$\frac{x_4}{x_5} = 1,1, \qquad \text{on trouve} \quad q = \quad 128 = 2^7,$$

$$\frac{x_4}{x_5} = 1,01, \qquad \text{on trouve} \quad q = \quad 1227 < 2^{11},$$

$$\frac{x_4}{x_5} = 1,001, \qquad \text{on trouve} \quad q = 12215 < 2^{14};$$

et pour des valeurs plus grandes de $\frac{x_4}{x_5}$, un nombre d'autant moindre d'opérations.

Généralement, on n'aura donc besoin que de *sept* opérations; et pour des rapports de racines aussi rapprochées que 1,01, 1,001, on n'aura que *onze* à *quatorze* opérations.

En général, calculant avec cinq décimales, on trouvera la valeur de la racine après l'extraction de la racine d'indice q, avec une approximation sûre jusqu'à la cinquième et souvent jusqu'à la sixième décimale.

Lorsqu'on est parvenu à une valeur approchée à la *cent millième* partie près de la valeur totale, on peut en toute sûreté se servir du théorème de Taylor ou de la méthode d'approximation de Newton: car l'incertitude de ces méthodes existe seulement lorsqu'une valeur approche non-seulement d'une racine, mais de plusieurs racines, et de très-près.

Soit $x_{(0)}$ une valeur approchée, on a donc

$$f(x_0) = x_0^n + A_1 x_0^{n-1} + \ldots + A_0^n = 0, \quad \text{à peu près};$$

représentons cette valeur de $f(x_0)$ par $[x_0^n]$,

$$f(x_0 + \Delta x_0) = f(x_0) + \frac{dfx_0}{dx_0} \Delta x_0 + \ldots = 0, \quad \text{environ};$$

$$x_0 \frac{dfx_0}{dx_0} = nx_0^n + (n-1) A_1 x_0^{n-1} + (n-2) A_2 x_0^{n-2} + \ldots.$$

Représentons cette valeur par $[nx_0^n]$; on a donc approximativement

$$\frac{\Delta x_0}{x_0} = \Delta \log x_0 = -\frac{[x_0^n]}{[nx_0^n]} \text{M};$$

M est le module du système tabulaire, et l'on a

$$\log \text{M} = 9,6376743.$$

On obtiendra ainsi, rien que par la substitution de x_0 dans l'équation, la valeur de $\Delta \log x_0$, et par conséquent celle de $\log x_0 + \Delta \log x_0$, seconde valeur approchée du logarithme de la racine.

Deuxième cas : *Toutes les racines sont imaginaires.*

Tout facteur réel du second degré, ayant deux racines imaginaires, peut être mis sous la forme

$$x^2 + 2g \cos\varphi + g^2,$$

où g est le module; l'équation qui a pour racines celles de la première équation élevées à une puissance q, aura un facteur du second degré de la forme

$$x^2 + 2g^q \cos q\varphi . x + g^{2q}.$$

Soient $\omega = f$, $2g^q \cos q\varphi = f_q$; selon les valeurs de q, f_q peut aller en augmentant ou en diminuant, excepté pour le cas spécial où $q\varphi$ est un multiple de π; alors

$f_q = 2g^q$ et le facteur devient $(x + g^q)^2$, et on rentre dans le cas des racines réelles égales : dans les autres cas, f_q varie de grandeur et de signe.

Soient

$$x^2 + fx + g^2, \quad x^2 + f'x + g'^2, \quad x^2 + f''x + g''^2, \ldots,$$

les n facteurs réels du second degré de l'équation; elle sera de la forme

$$\begin{aligned} x^{2n} &+ [f]x^{2n-1} + ([g^2] + [ff'])x^{2n-2} + ([g^2 f'] + [ff'f''])x^{2n-3} \\ &+ ([g^2 g'^2] + [g^2 f'f''] + [ff'f''f'''])x^{2n-4} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ ([g^2 g'^2 \ldots g^{(n-2)2}] + [g^2 g'^2 \ldots g^{(n-3)2} f^{(n-2)} f^{(n-1)}])x^2 \\ &+ [g^2 g'^2 \ldots g^{(n-2)2} f^{(n-1)}]x \\ &+ g^2 g'^2 \ldots g^{(n-1)2} = 0; \end{aligned}$$

les crochets indiquent des fonctions symétriques, les puissances de degré pair renferment les f en nombre pair, et les puissances de degré impair, des f en nombre impair.

Pour passer de cette équation à celle qui a pour racines x^q, il suffit de changer les f en f_q et les g en g^q, et désignons cette nouvelle équation par (2).

Soient $g > g'$, $g' > g''$, $g'' > g'''$, etc.

Considérons dans l'équation (2) les coefficients des puissances paires : d'abord le coefficient de x^{2n-2} ; q croissant, $[g^{2q}]$ se réduira à g^{2q}; le terme $[f_q f'_q]$ est plus petit que $4[g^q g'^q]$; par conséquent, le coefficient de x^{2n-2} finira par être moindre que $g^{2q} + 4g^q g'^q$. Le second terme de ce binôme disparaîtra devant le premier lorsqu'on aura

$$g^2 > g' \sqrt[q]{4},$$

inégalité qui s'établira toujours, en faisant croître q ; par exemple, pour $q = 128$, on a

$$\sqrt[128]{4} = 1.011$$

Ainsi, dès que g surpasse g', le coefficient de x^{2n-2} se réduit à g^{2q}; les mêmes raisonnements montrent que q allant en croissant, les coefficients des puissances successives paires tendent vers g^{2q}, $g^{2q}g'^{2q}$, $g^{2q}g'^{2q}g''^{2q}$, etc.

Ces raisonnements ne s'appliquent pas aux coefficients des puissances impaires, parce que les premiers termes contiennent en même temps g et f, de sorte que ces coefficients n'ont pas de limites déterminées; mais les coefficients des puissances paires suffisent pour faire connaître les divers g : ainsi le coefficient de x^{2n-2} donne g^{2q}, celui de x^{2n-4} donne $g^{2q}g'^{2q}$; donc

$$g'^{2q} = \frac{g^{2q}g'^{2q}}{g^{2q}},$$

et ainsi des autres.

Le facteur trinôme $x^2 + 2g\cos\varphi + q^2$ donne

$$x = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{où} \quad i = \sqrt{-1},$$

et g est remplacé par r; on substitue cette valeur dans l'équation

$$x^{2n} + A_1 x^{2n-1} + A_2 x^{2n-2} + \ldots + A_{2n} = 0;$$

on obtient deux équations

$$0 = \sum_0^{2n} A_{2n-p} r^p \cos p\varphi, \quad 0 = \sum_0^{2n} A_{2n-p} r^p \sin p\varphi;$$

la sommation se rapporte à p.

Multipliant la première équation par $\cos n\varphi$, et la seconde par $\sin n\varphi$, et les ajoutant, et ensuite multipliant la première équation par $\sin n\varphi$, et la seconde par $\cos n\varphi$, et retranchant, il vient

$$0 = \sum_0^{2n} A_p r^{2n-p}\cos(n-p)\varphi, \quad 0 = \sum_0^{2n} A_p r^{2n-p}\sin(n-p)\varphi;$$

faisons

$$A_q + A_{2n-q} r^{-(2n-2q)} = \beta_q, \quad A_q - A_{2n-q} r^{-(2n-2q)} = \gamma_q \ (*);$$

(*) Ne pas confondre cette lettre q avec celle qui a été employée ci-dessus.

les deux équations, après les avoir divisées par r^{2n}, deviennent

$$\sum_0^n \frac{\beta_p}{r^p}\cos(n-p)\varphi = 0, \quad \sum_0^n \frac{\gamma_p}{r^p}\sin(n-p)\varphi = 0.$$

On convertit les multiples des sinus et cosinus en puissances, d'après la méthode connue; on fait

$$t = -2r\cos\varphi,$$

et l'on parvient à ces deux équations :

$$(\mathrm{A})\left\{\begin{aligned} &T_n - r^2 T_{n-2} + r^4 T_{n-4} - r^6 T_{n-6} + r^8 T_{n-8} + \ldots = 0, \\ &T_{n-1} - r^2 T_{n-3} + r^4 T_{n-5} - r^6 T_{n-7} + r^8 T_{n-9} + \ldots = 0, \end{aligned}\right.$$

où

$$T_{n-1} = \beta t^n - \beta_1 t^{n-1} + \beta_2 t^{n-2} - \beta_3 t^{n-3} + \ldots (-1\ \beta_n,$$

$$T_{n-1} = \gamma t^{n-1} - \gamma_1 t^{n-2} + \gamma_2 t^3 - \nu_3 t^{n-3} \ldots (-1)^{n+1}\gamma_n,$$

$$T_{n-2} = n\beta t^{n-2} - (n-1)\beta_1 t^{n-3} + (n-2)\beta_2 t^{n-4} \ldots,$$

$$T_{n-3} = (n-2)\gamma t^{n-3} - (n-3)\gamma_1 t^{n-4} + (n-4)\gamma_2 t^{n-5} \ldots,$$

$$T_{n-4} = \frac{1}{1.2}[n(n-3)\beta t^{n-4} - (n-1)(n-4)\beta t^{n-5} \\ + (n-2)(n-5)\beta t^{n-6} \ldots],$$

$$T_{n-5} = \frac{1}{1.2}[(n-3)(n-4)\gamma t^{n-5} - (n-4)(n-5)\gamma t^{n-6} \ldots],$$

$$T_{n-6} = \frac{1}{1.2.3}[n(n-4)(n-5)\beta t^{n-6} \\ - (n-1)(n-5)(n-6)\beta_1 t^{n-7} \ldots],$$

$$T_{n-7} = \frac{1}{1.2.3}[(n-4)(n-5)(n-6)\gamma t^{n-7} \\ - (n-5)(n-6)(n-7)\gamma_1 t^{n-8} \ldots],$$

$$T_{n-8} = \frac{1}{1.2.3.4}[n(n-5)(n-6)(n-7)\beta t^{n-8} \\ - (n-1)(n-6)(n-7)(n-8)\beta_1 t^{n-9} \ldots],$$

$$T_{n-9} = \frac{1}{1.2.3.4}[(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)\gamma t^{n-9} \\ - (n-6)(n-7)(n-8)(n-9)\gamma_1 t^{n-10} \ldots];$$

. . . .

La loi de formation est évidente.

Si dans les valeurs des β et des γ, et dans les équations (A), on remplace r par la valeur trouvée de g, la racine t, commune aux deux équations (A), donnera la valeur ci-dessus désignée par f; il faut donc chercher le diviseur commun aux deux équations par voie d'élimination.

Le calcul numérique de l'élimination s'opère facilement à l'aide des Tables de Leonelli dites de Gauss.

Soient les deux équations

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n = 0,$$
$$x^n + B_1 x^{n-1} + B_2 x^{n-2} + \ldots + B_n = 0,$$

on en tire

$$(p) \quad x^{n-1}(A_1 - B_1) + x^{n-2}(A_2 - B_2) \ldots A_n - B_n = 0;$$

remplaçons tous les coefficients A_1, $A_2, \ldots$, A_n; B_1, $B_2, \ldots$, B_n, par leurs logarithmes, représentons-les par a_1, $a_2, \ldots$, a_n; b_1, $b_2, \ldots$, b_n, et écrivons

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \ldots, a_n \quad \text{et} \quad x^n + b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} \ldots b_n;$$

la différence, en ayant égard aux signes, donne

$$(a_1 - b_1) x^{n-1} + (a_2 + b_2) x^{n-2}.$$

Mais $a_1 - b_1$ ou $b_1 - a_1$, au moyen des Tables de Gauss, fait trouver $\log(A_1 - B_1)$; de même, $\log(A_2 - B_2), \ldots$: on a donc de suite l'équation (p) de degré $n - 1$. Si l'on a une seconde équation de ce degré, on en déduira une autre de degré $n - 2$, et de la même manière; il faut seulement faire attention : 1° à donner au premier terme pour coefficient l'unité, ce qu'on obtient en retranchant du logarithme de chaque coefficient, le logarithme du coefficient de ce premier terme; 2° à donner aux logarithmes les mêmes signes qu'ont les nombres. On voit que l'élimination se réduit à une suite de *soustractions*.

Troisième cas : *Racines imaginaires et racines réelles.*

L'auteur démontre que la méthode donnée ci-dessus, pour trouver les facteurs trinômes à racines *imaginaires*, est encore applicable de même à la recherche des facteurs trinômes à racines réelles; or toute équation de degré pair est décomposable en facteurs trinômes, et si le degré est impair, on le rend pair, en multipliant l'équation par l'inconnue; donc la méthode développée subsiste pour toutes les équations.

Pour les développements et les discussions ultérieures, leur étendue nous oblige de renvoyer au Mémoire de M. Encke.

Nous donnerons incessamment des applications numériques calculées par M. Koralek.

NOTE SUR LA CONSERVATION DU SENS DES DISTANCES AUX LIGNES DE TERRE DANS LES CHANGEMENTS DE PLANS DE PROJECTION;

Par M. CHEVILLARD,

Licencié ès sciences, professeur de Mathématiques et de Géométrie descriptive.

Lorsqu'on a à exécuter trois et quatre changements de plans de projection, comme cela se rencontre en charpente et même dans diverses questions élémentaires relatives aux polyèdres, aux cônes et cylindres de révolution, etc., l'on a besoin d'exprimer, dans les deux derniers plans de projection, des objets donnés dans les deux premiers, et réciproquement de revenir des résultats trouvés simplement dans les deux derniers plans, à ces résultats exprimés dans les deux premiers; opérations fatigantes, lorsqu'il y a beaucoup de points à considérer et qu'ils ne sont pas placés dans le même dièdre des deux premiers plans ou des deux derniers. Il faut, à chaque point, observer par l'espace comment se place sur l'épure la distance qui sert à marquer une nouvelle projection. C'est ce que font les praticiens et ce qui est indiqué par les ouvrages récents de Géométrie descriptive, où l'on recommande la méthode des changements de plans dont la généralisation est due à feu M. Olivier. Cependant cette méthode même indique comment on peut omettre les observations directes dans l'espace. On me pardonnera donc, en faveur de son utilité, la simplicité de la remarque actuelle qui était certainement connue de M. Olivier, quoique non formulée très-explicitement dans son livre.

Fig. 1

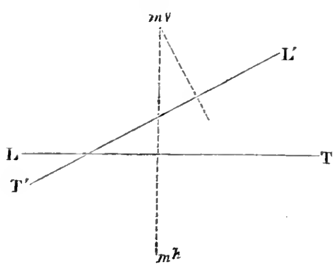
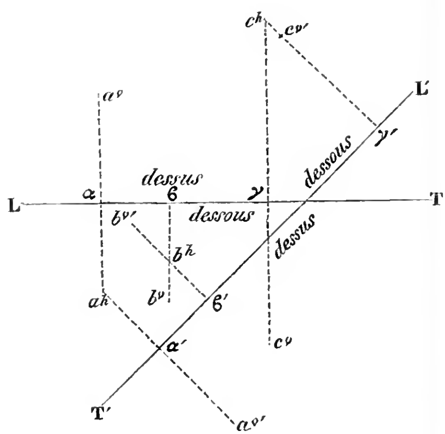


Fig. 2.



Dans un changement de plan de projection pour un point, la distance aux deux lignes de terre de la projection invariable conserve toujours le même sens.

Nous écrirons, d'après M. Olivier, les deux lettres L et T, de façon à ce qu'en y joignant la notation des projections, on distingue à la fois quel est le nouveau plan de projection et dans quel sens il est rabattu. Ainsi la *fig.* 1 indique qu'on veut faire un changement de plan horizontal, et que le nouveau plan horizontal L′T′ est rabattu par la partie antérieure vers la gauche du papier. Mais nous faisons de plus la convention que le *dessinateur* regarde toute ligne de terre de façon à voir L à gauche, T à droite, indépendamment de l'espèce de plan de projection représenté par cette ligne, et c'est de cette manière que cette droite aura pour lui le sens du *dessus* et du *dessous* (*fig.* 2).

Cela posé, si l'on fait, par exemple, un changement de plan vertical pour divers points a, b, c,..., on abaissera des perpendiculaires des projections a^h, b^h, c^h,..., sur L′T′, et il ne s'agira plus que de reporter les distances αa^v, $6 b^v$, γc^v,..., à partir de L′T′ pour avoir les projections nouvelles $a^{v'}$, $b^{v'}$, $c^{v'}$,... ; mais dans quel sens? *Dans le même sens par rapport à* L′T′ *que ces distances ont déjà respectivement par rapport à* LT. Ainsi l'on a de suite les nouvelles projections par la seule vue du papier. La raison en est que le sens d'une distance αa^v par rapport à LT indique le sens du point a par rapport au plan invariable qui est ici le plan horizontal. Si αa^v est au-dessus de LT, c'est que a est au-dessus du plan horizontal. Du reste, on verra bien mieux l'avantage de cette observation en faisant trois ou quatre changements de plans successifs et revenant des deux derniers aux deux premiers.

Pour faire des changements de plans relatifs à des droites ou à des plans, comme cela revient à changer pour un ou deux points au plus, on devra toujours opérer sans avoir besoin de voir directement dans l'espace à l'aide de la remarque précédente.

Note du Rédacteur. — Nous engageons les professeurs a lire dans le *Moniteur* des 18 et 19 janvier 1854, une savante leçon d'esthétique sur le dessin, donnée par M. Félix Ravaisson, inspecteur général de l'Instruction supérieure, et adressée sous forme de Rapport à S. E. le Ministre de l'Instruction publique. On y trouve sur l'enseignement du dessin d'excellentes réflexions, et qui sont une critique amère, sans doute contre l'intention de l'auteur, du plan actuel de l'enseignement général. Il s'élève contre l'introduction des méthodes *faciles* dans nos lycées (p. 73, 5e colonne). « *Encore une fois,* dit-il, *le remède à l'abus d'une science mal entendue n'est pas l'ignorance, mais une science supérieure* (p. 74, 3e colonne); et cependant on a introduit une *science inférieure !*

RECTIFICATION ET QUADRATURE D'UNE ELLIPSE SPHÉRIQUE ;

PAR LE RÉV. JAMES BOOTH,

Professeur au Collége de Liverpool.

(Philosophical Magazine, t. XXV, p. 18; 1844.)

---

1. THÉORÈME. A = *aire d'une surface sphérique terminée par une courbe.*

$$A = \int_0^{2\pi} d\omega \int_0 ds \, . \sin \sigma. \tag{1}$$

σ = arc de grand cercle, depuis un point fixe P appelé pôle, et un point variable s pris dans l'intérieur de l'aire.

ρ = rayon sphérique de la courbe passant par le pôle P et le point S de la courbe.

ω = angle que le plan du grand cercle Ps fait avec un plan fixe de grand cercle *fixe* passant par P.

Intégrant, ou par rapport à σ, on obtient

$$(2)\qquad A = \int_0^{2\pi} d\omega[1 - \cos\rho].$$

2. THÉORÈME. *s et s' étant deux points de la courbe, ρ_0, ρ_1 les deux rayons correspondants, on a pour la longueur de l'arc ss'*,

$$(3)\qquad \text{arc } ss' = \int_{\rho^0}^{\rho'} d\rho\left[1 + \left(\sin\rho\,\frac{d\omega}{d\rho}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

3. L'équation de l'ellipse sphérique est

$$(4)\qquad \frac{\cos^2\omega}{\tang^2\alpha} + \frac{\sin^2\omega}{\tang^2\beta} = \frac{1}{\tang^2\rho},$$

ou bien

$$(5)\qquad \frac{\cos^2\omega}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2\omega}{\sin^2\beta} = \frac{1}{\sin^2\rho};$$

2α est le grand axe de l'ellipse, angle maximum du cône au sommet.....
2β est le petit axe de l'ellipse, angle minimum du cône au sommet......
(centre de la sphère).

4. Les équations (4) et (5) donnent

$$(6)\qquad \cos\rho = \cos\alpha\,\frac{\sqrt{1 + \dfrac{\tang^2\alpha}{\tang^2\beta}\tang^2\omega}}{\sqrt{1 + \dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}\tang^2\omega}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (2), et intégrant, on obtient

$$(7)\qquad A = \frac{\pi}{2} - \cos\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega.\,\frac{\sqrt{1 + \dfrac{\tang^2\alpha}{\tang^2\beta}\tang^2\omega}}{\sqrt{1 + \dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}\tang^2\omega}},$$

où A est le quart de l'aire sphérico-elliptique; faisons

$$(8) \qquad \operatorname{tang}\omega = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha}\operatorname{tang}\varphi,$$

$$(9) \qquad \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}^2\alpha\cos^2\varphi + \operatorname{tang}^2\beta\sin\varphi};$$

d'où

$$(10) \quad A = \frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{tang}\alpha}{\operatorname{tang}\beta}\cos\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left\{\frac{1}{\left[1-\left(\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin^2\alpha\cos^2\beta}\right)\sin^2\varphi\right]\sqrt{1-\left(\frac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\right)\sin^2\varphi}}\right\}.$$

Prenons le plan de l'angle 2α renfermant l'axe *moyen* du cône, pour plan des xz, et le plan de l'angle 2β renfermant l'axe minimum du cône, pour plan des yz.

L'axe réel du cône est pris pour axe des z qui coupe la sphère au pôle P.

Menons par le sommet du cône, et dans le plan xz, deux droites faisant, avec l'axe *moyen* ou réel du cône, des angles égaux ε, tels que l'on ait

$$(11) \qquad \cos\varepsilon = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta};$$

ces droites sont les lignes *focales* du cône.

Le plan tangent à la sphère menée par le pôle P coupe le cône suivant une ellipse plane.

Soient a, b, c les demi-axes et l'excentricité, on a

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} c^2 &= \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{\operatorname{tang}^2\alpha - \operatorname{tang}^2\beta}{\operatorname{tang}^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha - \cos^2\beta} \\ &= \frac{\sin^2\varepsilon}{\sin^2\alpha}; \end{aligned} \right.$$

ainsi

$$(13) \quad A = \frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\alpha}\cos\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\left[\frac{1}{(1-c^2\sin^2\varphi\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\varphi}}\right],$$

fonction elliptique *complète* de troisième espèce à paramètre de forme *circulaire*.

5. *Longueur de l'arc*. L'équation (5) donne

$$(14)\qquad \sin^2\omega = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\rho}\left(\frac{\sin^2\alpha - \sin^2\rho}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}\right),$$

$$(15)\qquad \cos^2\omega = \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\rho}\left(\frac{\sin^2\rho - \sin^2\beta}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}\right):$$

différentiant l'équation (14), on obtient

$$\sin\omega\cos\omega\frac{d\omega}{d\rho} = \frac{-\sin^2\alpha\sin^2\beta\cos\rho}{\sin^3\rho\,(\sin^2\alpha - \sin^2\beta)},$$

et de là

$$(16)\qquad \frac{d\omega}{d\rho} = \frac{-\sin\alpha\sin\beta\cos\rho}{\sin\rho\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\rho}\sqrt{\sin^2\rho - \sin^2\beta}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (3), il vient

$$(17)\qquad \text{arc}\, ss' = \int_{\rho^0}^{\rho'} d\rho\left[\frac{\sin\rho\sqrt{\cos^2\rho - \cos^2\alpha\cos^2\beta}}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\rho}\sqrt{\sin^2\rho - \sin^2\beta}}\right],$$

l'arc étant mesuré du petit axe vers le grand axe; désignant par s la longueur du quadrant sphérique, alors

$$(18)\qquad s = \int_{\beta}^{\alpha} d\rho\left[\frac{\sin\rho\sqrt{\cos^2\rho - \cos^2\alpha\cos^2\beta}}{\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\rho}\sqrt{\sin^2\rho - \sin^2\beta}}\right];$$

posons

$$(19)\qquad \cos^2\rho = \frac{\sin^2\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\beta\sin^2\varphi}{\tang^2\alpha\cos^2\varphi + \tang^2\beta\sin^2\varphi},$$

équation polaire centrale. Les limites de l'intégration doivent être prises maintenant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ ou bien de $\frac{\pi}{2}$ à 0, en changeant les signes; différentiant l'équation (19), substituant dans l'équation (18) et intégrant, ayant égard aux limites, on trouve

$$(20)\ s = \frac{\tang \beta}{\tang \alpha} \sin \beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi) \sqrt{1 - \left(\frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} \right) \sin^2 \varphi}} \right].$$

6. Soit γ l'angle que fait une section circulaire du cône avec la base elliptique plane du cône, on a

$$(21) \qquad \cos \gamma = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha},$$

$$\sin^2 \gamma = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha};$$

introduisant cette valeur dans l'équation (20), on obtient

$$(22)\ s = \frac{\tang \beta}{\tang \alpha} \sin \beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\ \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \alpha}} \right),$$

fonction elliptique complète de troisième espèce, dont le paramètre est aussi de forme circulaire.

7. Faisons $\alpha + \beta' = \frac{\pi}{2}$, $\beta + \alpha' = \frac{\pi}{2}$; α' et β' sont les angles principaux du cône dit *supplémentaire* au cône donné; pour ce cône supplémentaire, on a

$$(23)\ s' = \frac{\tang \beta'}{\tang \alpha'} \sin \beta' \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\frac{1}{\sqrt{1 - e'^2 \sin^2 \varphi}\ \sqrt{1 - \sin^2 \gamma' \sin^2 \varphi}} \right];$$

or

$$(24) \qquad \frac{\tang \beta'}{\tang \alpha'} = \frac{\tang \beta}{\tang \alpha}, \quad e' = e, \quad \sin \gamma' = \sin \varepsilon,$$

donc

$$(25)\ s' = \frac{\tang \beta}{\tang \alpha} \cos \alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\frac{1}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 \varphi}} \right]:$$

ajoutant cette équation à l'équation (13),

$$(26)\qquad A + s' = \frac{\pi}{2}.$$

C'est la belle relation découverte par Mac Cullagh.

Prenant la surface sphérique *totale* S du cône donné et la circonférence entière Σ' de l'ellipse sphérique du cône supplémentaire, on déduit

$$(27)\qquad S + c\Sigma' = 2c^2\pi;$$

c est le rayon de la sphère, et l'on a ce théorème:

Théorème. *L'aire de la base sphérique d'un cône, plus le double de la surface latérale du cône supplémentaire, est égale à l'aire de la moitié de la sphère* (*).

8. Soient $2L$ l'aire latérale du cône, $2L'$ l'aire latérale du cône supplémentaire et S' l'aire de sa base; on a

$$(28)\qquad S + 2L' = 2c^2\pi,\quad S' + 2L = 2c^2\pi,$$

$$(29)\qquad (S + 2L) + (S' + 2L) = 4c^2\pi,$$

$$(30)\qquad S - S' = 2(L - L'),$$

relations qu'on peut énoncer sous forme de théorèmes.

Analogies entre l'ellipse plane et l'ellipse sphérique.

1. Dans une courbe plane, on a

$$(31)\qquad s = \int p\,d\lambda \pm u.$$

s = longueur d'un arc de courbe;

p = perpendiculaire abaissée d'un point *fixe* (pôle) sur une tangente à la courbe;

λ = angle de cette perpendiculaire avec une droite *fixe* passant par le pôle;

u = portion de la tangente comprise entre le point de contact de la tangente et le pied de la perpendiculaire; le signe supérieur lorsque le rayon de courbure au point

(*) Ce qu'on vérifie d'une manière élémentaire sur le cône droit. Tm.

de contact est plus grand que la perpendiculaire p, et le signe inférieur dans le cas opposé. Dans le cas d'égalité, on a

$$\frac{du}{d\lambda} = 0.$$

2.

(32) $$\frac{dp}{d\lambda} = u.$$

3. Prenons le centre d'une ellipse plane pour pôle, et le grand axe pour *droite fixe ;* or

$$p = a\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda},$$

de là

(33) $$s = a\int d\lambda \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda} - u;$$

car le rayon de courbure est moindre que p. On a aussi

(34) $$s' = a\int d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi},$$

φ étant l'angle d'un diamètre avec le petit axe, et l'arc s' étant compté à partir de l'extrémité du petit axe. Intégrant les deux équations (33) et (34) dans les mêmes limites pour λ et φ, on a

$$s' = \mathrm{K}, \quad s = \mathrm{K} - u;$$

d'où

(35) $$s'' - s = u.$$

Nous pouvons donc prendre sur un quadrant d'ellipse deux arcs mesurés respectivement des extrémités du petit axe et du grand axe, et dont la différence soit égale à une ligne droite.

On démontre facilement que les extrémités de ces arcs sont les intersections de l'ellipse par deux hyperboles biconfocales avec l'ellipse. La première hyperbole, passant par l'extrémité de l'arc mesuré du petit axe, a pour axes

$$(36)\qquad A = ae \sin \lambda, \quad B = ae \cos \lambda\,;$$

et la seconde hyperbole, passant par l'extrémité de l'arc mesuré du grand axe, a pour axes

$$(37)\qquad A' = \frac{ae \cos \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda}}, \quad B' = \frac{be \sin \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \cos \lambda}}.$$

4.
$$u = \frac{dp}{d\lambda} = \frac{ae^2 \sin \lambda \cos \lambda}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \lambda}},$$

donc

$$(38)\qquad au = AA', \quad bu = BB', \quad \frac{BB'}{AA'} = \frac{b}{a}.$$

5. 2θ et $2\theta'$ étant les angles des asymptotes dans les deux hyperboles, on a

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{B}{A} = \cot \lambda, \quad \operatorname{tang} \theta' = \frac{b}{a} \operatorname{tang} \lambda,$$

d'où

$$(39)\qquad \operatorname{tang} \theta \operatorname{tang} \theta' = \frac{b}{a},$$

relation indépendante de λ.

6. r' et r'' étant quatre demi-diamètres de l'ellipse, asymptotes des hyperboles, on a

$$\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2} = \frac{1}{r'^2}\,;$$

mettant pour les $\cos \theta$ et $\sin \theta$ les valeurs (39), on a

$$r'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda} = \frac{a^2 b^2}{p^2}\,;$$

on trouve de même

$$r''^2 = p^2\,;$$

de là

(40) $$r' r'' = p,$$

relation aussi indépendante de λ.

7. Dans les cas où u est un maximum, l'on a

$$\frac{du}{d\lambda} = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2 p}{d\lambda^2} = 0;$$

$$\frac{d^2 a\sqrt{1 - e^2 \sin^2\lambda}}{d\lambda} = 0;$$

d'où

(41) $$\tang^2\lambda = \frac{a}{b},$$

(42) $$A = a(a-b), \quad B = b(a-b), \quad A' = a(a-b), \quad B' = b(a-b),$$

$$A = A', \quad B = B'.$$

Ainsi, les deux hyperboles se confondent; les deux arcs elliptiques forment le quadrant; théorème de Fagnani :

$$au = AA' = a(a-b);$$

donc

$$u = a - b, \quad r' = r'' = p, \quad p^2 = ab.$$

Ainsi, le quadrant elliptique est divisé en deux arcs dont la différence est égale à la différence des deux demi-axes.

Nous désignerons ce point d'intersection par le nom de *section linéaire*.

Menons une tangente en ce point : soient t la portion de cette tangente terminée au petit axe, et t' la portion terminée au grand axe : on aura

$$t = \tang\lambda\sqrt{a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda},$$

$$t' = \frac{b^2\tang\lambda}{\sqrt{a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda}};$$

d'où

$$(44\ bis) \qquad t'-t=\frac{ae^2\sin\lambda\cos\lambda}{\sqrt{a^2\cos^2\lambda+b^2\sin^2\lambda}}=u\ (*).$$

8. Tous les points de section linéaire d'une série d'ellipses biconfocales sont sur une courbe dont l'équation est

$$a^2c^2=\left(x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}\right)\left(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}\right);$$

et tous les points de section linéaire d'une série d'ellipses concentriques ayant les mêmes axes principaux, et la somme de leurs axes principaux égale à une quantité constante 2 L, sont sur une hypocycloïde concentrique aux ellipses ; le rayon du cercle fixe est L, et le rayon du cercle roulant est $\frac{1}{4}$ L.

Formule de rectification des courbes sphériques.

9. Soient une sphère et un cône concentriques ; prenons celui-ci du second degré ; les raisonnements ne changent pas pour d'autres cônes. Par le centre O de la sphère menons un plan tangent au cône, coupant la sphère suivant un grand cercle touchant l'ellipse sphérique en un point E, et coupant la base plane du cône (menée comme ci-dessus § 3) en une droite u qui touche l'ellipse base plane du cône en un point i ; par l'axe du cône menons un plan perpendiculaire à la droite u ; soit l le point d'intersection : le plan passe par le centre C de l'ellipse sphérique et de l'ellipse plane.

Soient $OE=c$, $Oi=R$, $Ol=P$, $Cl=p$, $Ci=r$, $CE=\varpi=$ arc de grand cercle ; $u=il$; donc

$$R^2=c^2+r^2,\quad P^2=c^2+p^2,\quad R^2=P^2-u^2.$$

Si i' est un point infiniment voisin de i sur l'ellipse plane, et E' le point correspondant sur l'ellipse sphérique, on a

$$ii'=ds,\quad EE'=cd\sigma,$$

(*) On a omis à dessein les équations (43) et (44) de l'auteur, de même les équations suivantes : (45), (56) et (57).

et la proportion

$$\text{aire } O\,i\,i' : \text{aire } OEE' :: P\,ds : c^2\,d\sigma :: R^2 : c^2;$$

car ces triangles élémentaires sont semblables, d'où

$$(46) \qquad d\sigma = \frac{P\,ds}{R^2}.$$

ds est l'élément de l'arc, le rayon de la sphère étant l'unité. Remplaçant cette valeur de ds dans la formule (31), nous trouvons

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} = \frac{Pp}{R^2} + \frac{P}{R^2}\frac{du}{d\lambda} = \sin\varpi + \frac{1}{R^2}\left(\frac{P\,du}{d\lambda} - u^2\sin\varpi\right);$$

car

$$P\sin\varpi = p \quad \text{et} \quad P^2 = R^2 - u^2;$$

or

$$(47) \quad \sin\varpi = \frac{p}{P}, \quad u = \frac{dp}{d\lambda}, \quad \frac{du}{d\lambda} = \frac{d^2p}{d\lambda^2}, \quad \frac{P\,dP}{d\lambda} = \frac{pdp}{d\lambda}.$$

Faisant les substitutions dans l'équation précédente, on obtient

$$(48) \qquad \frac{d\sigma}{d\lambda} = \sin\varpi + \frac{1}{R^2}\left[\frac{P\,d^2p}{d\lambda^2} - \frac{dP}{d\lambda}\frac{dp}{d\lambda}\right].$$

Soit ν l'angle iOl,

$$\nu = \frac{u}{P}, \quad \cos\nu = \frac{P}{R};$$

d'où

$$(49) \quad \frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{1}{R^2}\left[\frac{P\,du}{d\lambda} - u\frac{dP}{d\lambda}\right] = \frac{1}{R^2}\left[\frac{P\,d\,p}{d\lambda^2} - \frac{dP}{d\lambda}\frac{dp}{d\lambda}\right];$$

$$(50) \quad \frac{d\sigma}{d\lambda} = \sin\varpi + \frac{d\nu}{d\lambda}, \quad \sigma = \int d\lambda\sin\varpi + \nu,$$

équation analogue à l'équation (31) pour les courbes planes. Or, l'on n'a fait aucun usage des propriétés spéciales au cône du second degré; cette formule appartient donc à une courbe sphérique quelconque, que l'on peut toujours considérer comme l'intersection de la sphère par un cône. Ainsi, un arc de courbe plane est toujours égal à une intégrale définie, plus une longueur d'une droite; et un arc de courbe sphérique est égal à une intégrale définie, plus un arc de grand cercle.

Seconde rectification de l'ellipse sphérique.

10. Soient a, b les demi-axes de l'ellipse plane, et α, β, ρ, ϖ, ν les arcs sous-tendus au centre de la sphère de rayon c, par les droites a, b, r, p, u; on a

$$a = c \operatorname{tang} \alpha, \quad b = c \operatorname{tang} \beta, \quad r = c \operatorname{tang} \rho,$$
$$p = c \operatorname{tang} \varpi, \quad u = \mathrm{P} \operatorname{tang} \nu;$$

dans cette même ellipse,

$$p^2 = a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda, \quad \operatorname{tang}^2 \varpi = \operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \lambda,$$

$$(51) \qquad \sin^2 \varpi = \frac{\operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \lambda}{\operatorname{séc}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{séc}^2 \beta \sin^2 \lambda}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (50),

$$(52) \qquad \sigma = \int d\lambda \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \lambda}{\operatorname{séc}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{séc}^2 \beta \sin^2 \lambda}} + \nu;$$

faisant

$$(53) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \rho = \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi + \sin^2 \beta \cos^2 \varphi, \\ \text{d'où} \\ \cos^2 \rho = \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \cos^2 \beta \cos^2 \varphi, \end{array} \right.$$

$$d\rho = \frac{\sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi}{\sin \rho \cos \rho} (\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta);$$

substituant ces valeurs dans l'équation (18), on trouve

$$(54) \qquad \sigma' = \int d\rho \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \varphi + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \varphi}{\operatorname{séc}^2 \alpha \cos^2 \varphi + \operatorname{séc}^2 \beta \sin^2 \varphi}}.$$

Si, dans les deux dernières équations, on exécute l'intégration entre les mêmes limites de λ et φ, leurs valeurs seront égales, et de là $\sigma' - \sigma = -\nu$.

Or,

$$\sin\nu = \frac{u}{P}, \quad u = \frac{dp}{d\lambda}, \quad \sin\nu = \frac{p \cdot \frac{dp}{d\lambda}}{pP};$$

p et P ne peuvent devenir ni zéros ni infinis, par conséquent ils conservent le même signe $+$: le signe de sinus ν est donc le même que celui de $p\,\frac{dp}{d\lambda}$.

Mais

$$p^2 = a^2 \sin^2\lambda + b^2 \cos^2\lambda;$$

donc

$$p\,\frac{dp}{d\lambda} = -(a^2 - b^2)\sin\lambda\cos\lambda;$$

ainsi, sin ν est négatif, et comme ν est plus petit que π, il s'ensuit que ν est négatif, et l'on a

(55) $$\sigma' - \sigma = \nu,$$

formule analogue à la formule (35).

11. Lorsque ν est un maximum, $\frac{d\nu}{d\lambda} = 0$, ou, d'après l'équation (49),

(58) $$\frac{dp}{d\lambda} \cdot \frac{dP}{d\lambda} = P\,\frac{d^2p}{d\lambda^2},$$

$$p = \sqrt{a^2\cos^2\lambda + b^2\sin^2\lambda}, \quad P = \sqrt{c^2 + p^2}.$$

Substituant dans l'équation (58), et remplaçant $\frac{a}{c}$ par tang α, et $\frac{b}{c}$ par tang β, on obtient

(59) $$\tan^2\lambda = \frac{\operatorname{tang}\alpha \operatorname{séc}\alpha}{\operatorname{tang}\beta \operatorname{séc}\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\operatorname{séc}^2\varepsilon;$$

ε est l'excentricité de l'ellipse sphérique ; résultat analogue à l'équation (41).

12. On trouve, en faisant les substitutions,

$$(60)\qquad \operatorname{tang}\nu = \frac{e^2 \sin^2\alpha \sin\lambda \cos\lambda}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\lambda}\,\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\lambda}}.$$

13. Concevons deux hyperboles sphériques, biconfocales à l'ellipse sphérique, l'une passant par l'extrémité de l'arc mesuré de l'extrémité du petit axe et l'autre par l'extrémité de l'arc compté à partir du grand arc; désignons par 2 A, 2 B les axes de la première hyperbole, et par 2 A′ et 2 B′ les axes de la deuxième hyperbole: on trouve, sans beaucoup de peine,

$$(61)\qquad \operatorname{tang}^2 A = \frac{\sin^2\varepsilon\sin^2\lambda}{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\lambda},\quad \operatorname{tang}^2 B = \frac{\sin^2\varepsilon\cos^2\lambda}{1-\sin^2\varepsilon\sin^2\lambda},$$

$$(62)\qquad \operatorname{tang}^2 A' = \frac{\operatorname{tang}^2\varepsilon\cos^2\lambda}{1-e^2\sin^2\lambda},\quad \operatorname{tang}^2 B' = \frac{e^2\cos^2\varepsilon\sin^2\beta\sin^2\lambda}{1-e^2\sin^2\lambda};$$

et de là

$$(63)\qquad \left\{\begin{array}{l}\operatorname{tang}\nu\operatorname{tang}\beta\cos\alpha = \operatorname{tang}B\operatorname{tang}B',\\ \operatorname{tang}\nu\operatorname{tang}\alpha\cos\beta = \operatorname{tang}A\operatorname{tang}A',\end{array}\right.$$

$$\frac{\operatorname{tang}B\operatorname{tang}B'}{\operatorname{tang}A\operatorname{tang}A'} = \frac{\operatorname{tang}\beta\operatorname{séc}\beta}{\operatorname{tang}\alpha\operatorname{séc}\alpha};$$

résultats analogues à l'équation (38) : dans les hyperboles,

$$\operatorname{tang}^2\varepsilon' = \frac{\operatorname{tang}^2 A + \operatorname{tang}^2 B}{1-\operatorname{tang}^2 B},\quad \operatorname{tang}^2\varepsilon'' = \frac{\operatorname{tang}^2 A' + \operatorname{tang}^2 B'}{1-\operatorname{tang}^2 B'}:$$

dans l'ellipse.

$$\operatorname{tang}^2\varepsilon = \frac{\operatorname{tang}^2\alpha - \operatorname{tang}^2\beta}{1+\operatorname{tang}^2\beta};$$

d'où

$$\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon''.$$

14. Lorsque ν est un maximum,

$$\operatorname{tang}^2 \lambda = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \operatorname{séc}^2 \alpha,$$

et de là, en ce cas,

$$(64) \quad \begin{cases} \operatorname{tang}^2 A = \operatorname{tang} \alpha \operatorname{séc} \alpha (\sin \alpha - \sin \beta), \\ \operatorname{tang}^2 B = \operatorname{tang} \beta \operatorname{séc} \beta (\sin \alpha - \sin \beta), \\ \operatorname{tang}^2 A' = \operatorname{tang} \alpha \operatorname{séc} \alpha (\sin \alpha - \sin \beta), \\ \operatorname{tang}^2 B' = \operatorname{tang} \beta \operatorname{séc} \beta (\sin \alpha - \sin \beta), \end{cases}$$

d'où

$$A = A', \quad B = B';$$

ou, lorsque ν est un maximum, les deux hyperboles se réunissent, et les axes de l'ellipse sphérique ont une extrémité commune et forment ensemble le quadrant; ce point commun peut être appelé le point de *section circulaire*.

Dans ce même cas,

$$(65) \quad \operatorname{tang} \nu = \operatorname{séc} \alpha \sec \beta (\sin \alpha - \sin \beta).$$

15. Les plans asymptotes sont parallèles aux sections circulaires du cône; soit 2θ l'angle asymptotique de l'hyperbole (A, B): d'après l'équation (21), on a donc

$$\sin^2 \theta = \frac{\sin^2 \beta'}{\sin^2 \alpha'},$$

β' et α' étant les demi-angles principaux du cône qui a pour base l'hyperbole sphérique.

Or

$$\sin \beta' = \cos \lambda, \quad \sin \alpha' = \cos A \quad \text{et} \quad \sin^2 \theta = \frac{\cos^2 \lambda}{\cos^2 A}:$$

mettant pour $\cos^2 A$ sa valeur déduite de l'équation (61), on trouve

$$(66) \quad \operatorname{tang} \theta = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cot \lambda.$$

Éliminant θ entre cette équation et l'équation de l'ellipse $\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\alpha} + \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\beta} = 1$, il résulte

$$(67) \qquad \frac{\tang^2\alpha\cos^2\lambda + \tang^2\beta\sin^2\lambda}{\text{séc}^2\alpha\cos^2\lambda + \text{séc}^2\beta\sin^2\lambda} = \frac{\sin^2\alpha\sin^2\beta}{\sin^2\rho};$$

et, d'après l'équation (51),

$$(68) \qquad \sin\rho = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\varpi}.$$

Soit $2\theta'$ l'angle asymptotique de la deuxième hyperbole (A', B'); on a

$$\sin\theta' = \frac{\sin\beta''}{\sin\alpha''},$$

β'' et α'' sont les demi-angles principaux du cône qui a pour base l'hyperbole. On trouve aisément que

$$\tang B'' = \frac{\tang B'}{\tang A'}, \quad \sin\alpha'' = \cos A';$$

d'où, d'après l'équation (62),

$$\sin^2\theta' = \frac{\tang^2\beta\sin^2\lambda}{\tang^2\alpha\cos^2\lambda + \tang^2\beta\sin^2\lambda},$$

$$\cos^2\theta' = \frac{\tang^2\alpha\cos^2\lambda}{\tang^2\alpha\cos^2\lambda + \tang^2\beta\sin^2\lambda},$$

$$(69) \qquad \tang\theta' = \frac{\tang\beta}{\tang\alpha}\tang\lambda,$$

et

$$(70) \qquad \tang\theta\tang\theta' = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}:$$

résultat indépendant de λ et parfaitement conforme au résultat de l'équation (39).

16. Nommons ρ' le demi-diamètre de l'ellipse, asymp-

tote de l'hyperbole : on a

$$(71) \qquad \sin^2\rho' = \frac{\tang^2\alpha\cos^2\lambda + \tang^2\beta\sin^2\lambda}{\text{séc}^2\alpha\cos^2\lambda + \text{séc}^2\beta\sin^2\lambda},$$

et de là

$$(72) \qquad \sin\rho\sin\rho' = \sin\alpha\sin\beta,$$

analogue à l'équation (40), et $\rho' = \varpi$: ou le demi-diamètre de l'ellipse, asymptote de l'hyperbole (A', B'), est égal à la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipse sur la tangente passant par le point d'intersection de l'ellipse et de l'hyperbole.

17. Construisons un cercle sur le grand axe de l'ellipse sphérique comme diamètre ; soient m et μ les points où les ordonnées prolongées des extrémités des arcs elliptiques σ et σ' coupent ce cercle ; désignons par r_1 et r'_1 les demi-diamètres de l'ellipse passant par ces points, et par ϑ et ϑ' les angles que r_1 et r'_1 font avec le grand axe (construction analogue à celle qu'on fait sur l'ellipse plane).

On a

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \lambda,$$

H étant l'ordonnée sphérique du point μ, on a, dans ce cas,

$$\frac{\tang^2\zeta}{\tang^2\alpha} + \frac{\tang^2 H}{\tang^2\alpha} = 1 \text{ dans le cercle},$$

$$\frac{\tang^2\zeta}{\tang^2\alpha} + \frac{\tang^2\varkappa}{\tang^2\beta} = 1 \text{ dans l'ellipse};$$

d'où

$$\frac{\tang H}{\tang\alpha} = \frac{\tang\varkappa}{\tang\beta};$$

et les formules du triangle rectangle donnent

$$\frac{\operatorname{tang}^2 H}{\operatorname{tang}^2 \alpha} = \sin^2 \vartheta',$$

ou

$$\sin^2 \vartheta' = \frac{\operatorname{tang}^2 \alpha}{\operatorname{tang}^2 \beta} = \frac{\operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \lambda}{\operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \lambda}.$$

Éliminant ϑ' entre cette équation et l'équation polaire (au centre) de l'ellipse (19), on obtient

(73) $$\operatorname{tang}^2 r'_1 = \operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \lambda,$$

et comme

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \lambda,$$

$$\operatorname{tang}^2 r_1 = \frac{\operatorname{tang}^2 \alpha \operatorname{tang}^2 \beta}{\operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \lambda},$$

ou

(74) $$\operatorname{tang} r_1 \operatorname{tang} r'_1 = \operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta.$$

18. Résumant les valeurs des angles des asymptotes des hyperboles, et aussi les valeurs des diamètres de l'ellipse passant par les points m et μ, nous trouvons

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \cot \lambda, \qquad \operatorname{tang} \vartheta = \cot \lambda,$$

$$\operatorname{tang} \theta' = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \alpha} \operatorname{tang} \lambda, \qquad \operatorname{tang} \vartheta' = \frac{\operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \alpha} \operatorname{tang} \lambda.$$

Ici nous remarquons une remarquable interruption dans l'analogie que nous avons toujours trouvée exister entre les propriétés de l'ellipse plane et de l'ellipse sphérique : dans l'ellipse plane, les asymptotes de l'hyperbole coïncident avec les diamètres qui passent par les points m et μ (§ 5, p. 201), et cela existe encore pour l'hyperbole sphérique voisine du grand axe (A', B'), mais n'existe plus pour l'hyperbole voisine du petit axe (A, B); en d'autres termes, on a

$$\theta' = \vartheta',$$

mais θ n'est pas égal à ϑ.

19. Soit η la coordonnée du point de *section circulaire;* par ce point menons une tangente, et soit z le point où cette tangente coupe le petit axe; on a

$$\text{tang}\,\eta\,\text{tang}\,\zeta = \text{tang}^2\,\beta,$$

ζ est la distance du centre de l'ellipse au point z; et

$$\cos\tau = \cos\varkappa_1\cos(\zeta - \eta) = \cos\varkappa_1\cos\zeta\cos\eta + \cos\varkappa_1\sin\zeta\sin\eta;$$

$\varkappa_1$ est l'abscisse du point de *section circulaire*, et τ la longueur de la tangente entre ce point et le point z.

Éliminant ζ, on obtient

$$\cos\tau = \frac{\cos\varkappa_1\sin\eta\,\text{séc}^2\beta}{\sqrt{\text{tang}^4\beta + \text{tang}^2\eta}},$$

et η étant l'ordonnée commune à l'ellipse et à l'hyperbole,

$$\text{tang}^2\eta = \frac{\sin^2\beta\cos^2\lambda}{\cos^2\alpha\sin^2\lambda + \cos^2\beta\cos^2\lambda},$$

et aussi

$$\sin\varkappa_1 = \sin\alpha\sin\lambda;$$

faisant les substitutions nécessaires, nous obtenons

$$\operatorname{tang}^2 \tau = \operatorname{tang}^2 \lambda \left\{ \frac{\operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \lambda}{\operatorname{séc}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{séc}^2 \beta \sin^2 \lambda} \right\},$$

$$(76) \quad \operatorname{tang} \tau = \operatorname{tang} \lambda \sin \alpha \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2 \lambda}{1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 \lambda}},$$

ou

$$e^2 = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \cos^2 \beta} \quad \text{(voir équation 12).}$$

Soit τ' le segment de la tangente prolongée jusqu'au grand axe, nous aurons

$$\cos \tau' = \frac{\sin \varkappa_1 \cos \eta \operatorname{séc}^2 \alpha}{\sqrt{\operatorname{tang}^4 \alpha + \operatorname{tang}^2 \varkappa_1}},$$

$$\operatorname{tang}^2 \varkappa_1 = \frac{\operatorname{tang}^4 \alpha \cos^2 \lambda}{\operatorname{tang}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 \beta \sin^2 \lambda},$$

$$\sin^2 \eta = \frac{\operatorname{tang}^4 \beta \sin^2 \lambda}{\operatorname{tang}^2 \alpha \operatorname{séc}^2 \alpha \cos^2 \lambda + \operatorname{tang}^2 \beta \operatorname{séc}^2 \beta \sin^2 \lambda};$$

éliminant $\varkappa_1$ et η, on a

$$(77) \qquad \operatorname{tang} \tau' = \frac{\operatorname{tang} \lambda \operatorname{tang}^2 \beta \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \sqrt{\frac{1 - e^2 \sin^2 \lambda}{1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 \lambda}}};$$

de là

$$(78) \quad \operatorname{tang}(\tau - \tau') = \frac{e^2 \sin \alpha \sin \lambda \cos \lambda}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)(1 - \sin^2 \varepsilon \sin^2 \lambda)}},$$

d'où, en vertu de l'équation (60),

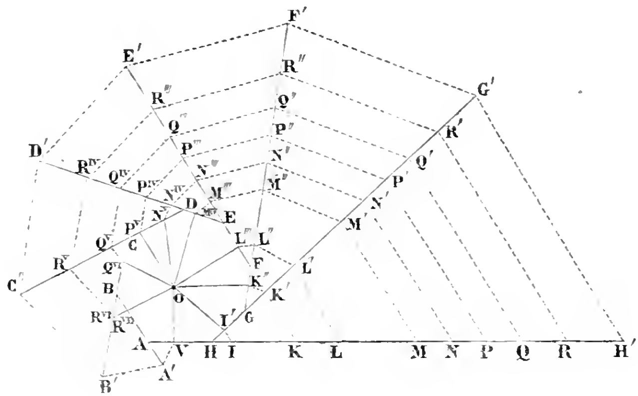
$$\tau - \tau' = \nu,$$

analogue à l'équation (44 *bis*).

NOUVELLE MÉTHODE POUR DIVISER UN POLYGONE EN PARTIES PROPORTIONNELLES A DES QUANTITÉS DONNÉES PAR DES DROITES PARTANT D'UN POINT QUELCONQUE PRIS DANS SON INTÉRIEUR;

PAR M. EUZET,

Garde du Génie, à Toulon.



Soit, pour fixer les idées, l'octogone irrégulier ABC...GH à diviser en 9 parties, proportionnelles aux quantités $a, b, c, \ldots$, par des droites partant du point O, la première ligne de division OV′ étant donnée.

Prolongez tous les côtés de la figure indéfiniment et dans le même sens; menez par le point V, à la première diagonale fictive OA, la parallèle VA′ terminée à la rencontre de AB prolongé en A′; menez par A′ à la diagonale suivante OB, la parallèle $A' B'$ terminée au prolongement de BC, et ainsi de suite, vous rencontrerez le prolongement du côté AH de départ en un certain point H' tel, que le triangle VOH' sera équivalent à l'octogone proposé.

Cela admis, divisez VH' en parties VI, IK, KL, etc., proportionnelles aux quantités données a, b, c, d, etc.: menez par les points de division I, K, L, M, N,..., des parallèles à $G' H'$ terminées sur HG, ou son prolongement, en I', K', L', M',...; menez par ces derniers points des parallèles à $F' G'$ terminées sur FG ou son prolongement en K'', L'', M'',..., et ainsi de suite, vous rencontrerez nécessairement les côtés proprement dits de l'octogone, aux points I'', K'', L'''. M^{iv}, N^{v},..., qui étant joints avec le point O, détermineront des droites partageant l'octogone proposé en 9 parties ayant entre elles le rapport demandé.

Il suffit de faire voir qu'une partie quelconque OVM du triangle OVH' est équivalente à la partie correspondante $VHGEM^{iv}$ du polygone proposé; en effet: le triangle $OVM = OVH + OHM = OVH + OHM' = OVGH + OGM' = OVHG + OGM'' = OVHGF + OFM'' = OVHGF + OFM''' = OVHGFM^{iv}$; ce qu'il fallait démontrer.

TABLES DES LOGARITHMES NÉPÉRIENS DE ZACHARIUS DASE.

L'observatoire de Vienne, comme tous les autres observatoires principaux, le nôtre excepté (*), publie des

(*) Nous pouvons espérer que cette honteuse exception cessera bientôt

Annales, sous la direction de M. le directeur Louis de Littrow. Le XIV[e] volume de la nouvelle série (1851) contient, dans le I[er] cahier, *une Table des logarithmes naturels de la même étendue que les logarithmes de Briggs dans les Tables de Vega.*

Ces Tables ont été calculées de tête par le célèbre Zacharius Dase, la plus grande faculté calculatrice mentale qui ait jamais existé (*Nouvelles Annales*, tome IX, page 12). La Table s'étend de 1 à 105 000. Dans l'introduction, l'auteur dit : *Cette Table a été calculée avec le plus grand soin avec* 10 *chiffres, afin d'avoir le* 7[e] *chiffre avec exactitude. J'ai lu moi-même les épreuves, et, l'impression achevée, j'ai tout calculé de nouveau et n'y ai trouvé que les six erreurs suivantes.*

Il est inutile d'insister sur l'utilité des logarithmes naturels, puisque les intégrations ne s'opèrent immédiatement que par ces logarithmes; par le même motif, il serait extrêmement commode d'avoir les logarithmes naturels des lignes trigonométriques. C'est ce qu'on devrait faire faire à Vienne par M. Dase, ou ce que le Bureau des Longitudes pourrait faire exécuter à Paris par l'excellent et intelligent calculateur, M. Koralek. Le plus précieux de tous les instruments arithmétiques est celui que la nature organise dans certains cerveaux privilégiés. Pourquoi ne pas en tirer parti dans l'intérêt de la science (*)?

Si nous avions des Tables usuelles pour les lignes hyperboliques, les logarithmes de Leonelli, dit de Gauss, les fonctions elliptiques, les Γ de Legendre, les logarithmes intégrants de Solner, etc., toutes ces transcendantes finiraient par entrer dans le domaine public,

(*) M. Grandmange, né à Épinal (Vosges) en 1835, sans bras et sans jambes, donne des séances publiques, boulevard du Temple, n° 4, où il exécute, *de tête*, des opérations très-compliquées d'arithmétique et d'algèbre.

comme aujourd'hui les lignes trigonométriques, que l'habitude nous fait envisager sans frayeur. Une intégrale ramenée à une de ces transcendantes serait une intégrale connue, et beaucoup de questions de physique difficiles auraient des solutions vulgaires, tels que sont maintenant les calculs qui exigent des logarithmes et des sinus. Toute transcendante pour laquelle il existe une Table et des relations, additions, soustractions, etc., a une utilité pratique. Le Bureau des Longitudes est ou devrait être principalement institué pour ce genre d'utilité.

PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE QUI SE RAPPORTENT AU CALCUL DES ORBITES COMÉTAIRES;

D'APRÈS M. GRUNERT.

(Arch. de Mathématiques, t. XVII, p. 121; 1851.)

PROBLÈME 1. *Quatre droites sont données dans un plan; mener une cinquième droite telle, que les trois segments interceptés par les quatre droites soient dans un rapport donné.*

(NEWTON, *Arith. univers.* Prob. géom. 50.)

Une solution synthétique très-simple est due au célèbre architecte et géomètre sir Christopher Wren. On la trouve dans l'Astronomie de David Grégory, lib. V, prop. 12.

PROBLÈME 2. *Trois droites sont données dans l'espace; mener une quatrième droite telle, que les segments interceptés par les trois droites aient un rapport donné.*

(BOUGUER, de la Détermination de l'orbite des comètes, *Mém. de l'Acad. des Sciences*, 1733, page 331.)

PROBLÈME 3. *Quatre droites sont données dans l'espace; mener une droite qui coupe les quatre droites.*

PROBLÈME 4. *Trois droites et un point F sont donnés* *dans l'espace; décrire une parabole ayant ce point pour foyer et coupant les droites aux points* A, B, C, *de manière que les aires des triangles* FAB, FBC *soient dans un rapport donné.*

(Olbers, *Abhandlung über die leichteste und bequemste methode die Bahn eines cometen zu berechnen;* Weimar, 1797. — C'est la célèbre dissertation sur la méthode la plus facile, la plus commode de calculer l'orbite d'une comète. On en a une nouvelle édition, considérablement augmentée par Encke. Weimar, 1847. On y donne la solution de ce problème 4.)

Problème 5. *Quatre droites et un point* F *sont donnés dans l'espace; mener par ce point un plan qui coupe les quatre droites en quatre points* A, B, C, D, *tellement que les aires des trois triangles* FAB, FBC, FCD *soient dans des rapports donnés.*

C'est à ce problème que M. Grunert ramène le calcul de l'orbite. La solution est analytique, et l'auteur en fait l'application à la comète de 1769. Le calcul est direct, sans aucun tâtonnement, et n'exige que les connaissances élémentaires des deux trigonométries; mais c'est aux astronomes calculateurs à en juger.

Il est presque superflu de dire que c'est la loi de Képler sur les aires qui rattache le problème des comètes à la géométrie.

La première idée d'assigner une parabole aux orbites cométaires appartient à un ecclésiastique nommé Dolfel de Plauen, dans le Voigtland. Voici le titre de son ouvrage : *Astronomische betrachtungen des grossen cometen. Welcher,* 1680 *und* 1681, *erschienen, dessen zu Plauen angestellte observationes, von* M. G. S. D. Plauen, 1681. (Considérations astronomiques sur la grande comète qui a paru en 1680 et 1681, avec les observations faites à Plauen en 1681.)

Ce sont précisément les calculs sur cette comète qui ont amené Newton à proposer une orbite parabolique, mais postérieurement à Dolfel, car la première édition des Principes est de 1687 : c'est aussi la célèbre comète dont Halley a prédit, en 1705, le retour pour 1759.

SOLUTION DE LA QUESTION 285

(voir t. XII, p. 443);

PAR M. H. ROCHETTE, S. J.,
de la maison ecclésiastique de Vals, près Le Puy.

Lemme. Lorsque deux triangles ont même base, la droite qui joint leurs sommets est parallèle à celle qui joint leurs centres de gravité.

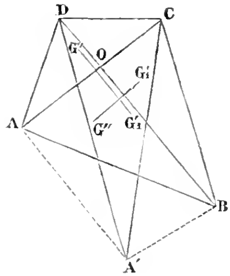
Soient ABC, A'BC deux triangles ayant même base; si nous désignons par G et G' leurs centres de gravité, par h et h' les perpendiculaires abaissées des points G et G' sur la droite AA', nous avons, d'après une propriété connue (*) (*voir* BRIOT et BOUQUET, *Géométrie analytique*, 2e édition, n° 35, 1°)

$$h = \frac{h_1 + h'_1}{3}, \qquad h' = \frac{h_1 + h'_1}{3},$$

h_1 et h'_1 étant les perpendiculaires abaissées des points B et C sur AA'. Donc $h = h'$ et AA' est parallèle à GG'.

Dans un quadrilatère plan, trois fois l'aire du triangle formé par le centre de gravité du quadrilatère comme sommet, et un côté A du quadrilatère comme base, plus l'aire du triangle formé par l'intersection des deux diagonales comme sommet, et le côté opposé à A comme base, est égale à l'aire du quadrilatère. (MÖBIUS.)

(*) Cette propriété se démontre aussi très-simplement d'une manière élémentaire.



Soient ABCD le quadrilatère donné, AB le côté désigné par A, et G le centre de gravité du quadrilatère à l'intersection des deux droites $G'G''$, G_1G', qui joignent les centres de gravité G', G'', G_1, G'_1 des triangles BCD, ABD, ABC, ADC.

Construisons par la pensée le triangle qui a le côté DC pour base et même centre de gravité que le quadrilatère. Les lignes qui joignent le sommet O′ de ce triangle aux points A et B sont respectivement parallèles (*Lemme*) aux droites $G_1G'_1$ et $G'G$, et, par conséquent, aux droites BO et AO. Le quadrilatère AOBO′ est donc un parallélogramme, et la perpendiculaire abaissée du point O′ sur AB égale la perpendiculaire h abaissée du point O sur AB.

Désignons par H la perpendiculaire abaissée du point G sur AB, et par h' et h'' les perpendiculaires abaissées des points D et C sur cette même droite. Nous aurons (*voir* Briot et Bouquet, *Géométrie analytique*, numéro déjà cité)

$$H = \frac{h' + h'' - h}{3},$$

d'où, si nous représentons par T, T′, T″, T‴, T^{iv} les triangles GAB, ABC, ABD, ABO, ODC,

$$3T = T' + T'' - T''',$$

ou bien

$$3T + T^{IV} = \text{surface du quadrilatère.} \quad \text{C. Q. F. D.}$$

M. Genocchi (Angelo) donne une solution analogue.

SOLUTION DE LA QUESTION 284

(voir t. XII, p. 443);

PAR M. H. ROCHETTE, S. J.,
de la maison ecclésiastique de Vals, près Le Puy.

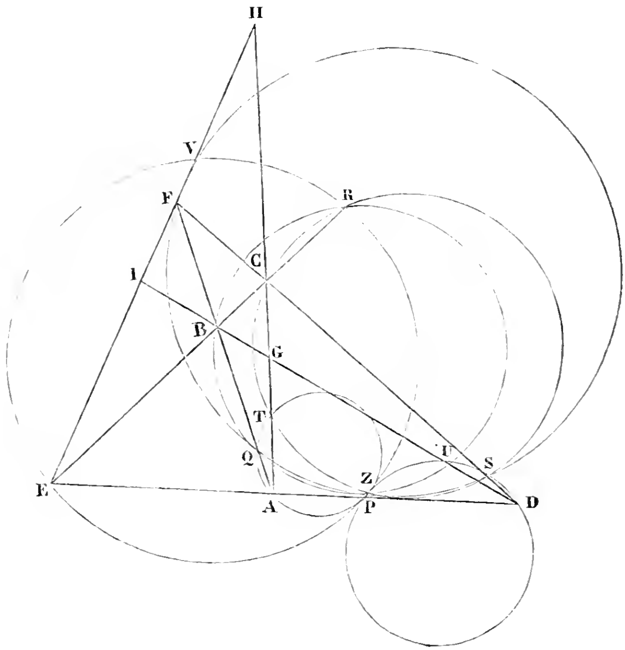
Soient le quadrilatère plan ABCD; E l'intersection des côtés CB et DA; F l'intersection de BA, CD. Prenons un point quelconque T sur la diagonale AC; par les deux points A et T faisons passer un *premier* cercle; par C et T, un *deuxième* cercle : le premier cercle coupe AD en P et AB en Q; le deuxième cercle coupe CB en R et CD en S. Par les points Q, B, R faisons passer un *troisième* cercle, et par les points P, D, S un *quatrième* cercle; ces deux derniers cercles (troisième et quatrième) couperont la diagonale BD en un même point U. Menons un *cinquième* cercle par les points P, E, R, et un *sixième* cercle par les points Q, F, S : ces deux derniers cercles coupent la troisième diagonale EF au même point V.

Les six cercles se coupent en un même point Z, et les six arcs ZA, ZB, ZC, ZD, ZE, ZF, pris d'un même côté, sont semblables.

Soit G l'intersection des deux diagonales AC, BD; les quatre points G, U, T, Z sont sur une même circonférence.

Soit H l'intersection des diagonales AC, EF; les quatre points H, V, T, Z sont sur une même circonférence.

Soit enfin I l'intersection des diagonales BD, EF; les quatre points I, U, V, Z (*) sont sur une même circonférence. (Möbius.)



Les deux premiers cercles se coupant en Z, le troisième, qui passe par les points Q, B, R, passera aussi par ce point Z; car le quadrilatère QBRZ est inscriptible, puisque

$$\text{ang BRZ} = \text{ang ATZ} = \text{ang AQZ}.$$

(*) La lettre T, qui se trouve dans l'énoncé, nous a paru devoir être remplacée par la lettre V.

De même, nous avons

$$\text{ang } ZSC = \text{ang } ATZ = \text{ang } ZPD,$$

et le quadrilatère PDSZ étant inscriptible, le cercle qui passe par les points P, D, S passe aussi par le point Z.

U étant le point de rencontre du troisième cercle avec la diagonale BD, si U′ est le point de rencontre du quatrième cercle avec cette même diagonale, on a

$$\text{ang } BUZ = \text{ang } AQZ = \text{ang } ZPD,$$

et, par conséquent, les angles BUZ, DU′Z sont supplémentaires, c'est-à-dire que les points U et U′ se confondent en un seul.

Le quadrilatère PERZ est inscriptible, car

$$\text{ang } CRZ = \text{ang } ATZ = \text{ang } ZPD.$$

Le cinquième cercle passe donc par le point Z.

Le quadrilatère FQSZ est aussi inscriptible, car nous avons

$$\text{ang } CSZ = \text{ang } ATZ = \text{ang } AQZ,$$

et, par conséquent, les angles FSZ, FQZ sont supplémentaires. Le sixième cercle passe donc par le point Z.

Soient V et V′ les points où le cinquième et le sixième cercle rencontrent la diagonale FE; ces deux points se confondent en un seul, car

$$\text{ang } EVZ = \text{ang } ZPD = \text{ang } AQZ = \text{ang } FV'Z.$$

Ainsi, les six cercles se coupent en un même point Z, et les six arcs ZA, ZB, ZC, ZD, ZE, ZF, pris d'un même côté, sont semblables, puisque les angles ZQA, ZRB, ZSC, ZPD, ZVE, ZSF sont égaux, comme on l'a vu dans le cours de la démonstration.

G étant le point d'intersection des diagonales BD, AC, les quatre points G, U, T, Z sont sur une même circonférence, puisqu'on a

$$\text{ang GUZ} = \text{ang AQZ} = \text{ang ATZ}.$$

Les quatre points H, V, T, Z, sont aussi sur une même circonférence, car

$$\text{ang HVZ} = \text{ang EPZ} = \text{ang HTZ}.$$

L'angle $\text{EVZ} = \text{ang ZPD} = \text{ang IUZ}$, d'où le quadrilatère IUVZ est inscriptible, et les quatre points I, U, V, Z sont sur une même circonférence.

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez MALLET-BACHELIER, libraire, quai des Augustins, 55.

ÉLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE THÉORIQUE ET PRATIQUE, par M. *E.-A. Tarnier*, docteur ès sciences mathématiques, 2[e] édition, conforme aux nouveaux Programmes d'enseignement. Paris, 1853; 1 vol in-8, de IV-298 pages.

Les *Nouvelles Annales* ont rendu un compte favorable de la première édition de ces Éléments (tome X, page 301). La seconde, quoique conçue dans le même esprit, est à quelques égards un ouvrage nouveau. L'auteur abandonne la méthode synthétique pour y substituer l'analytique, qui, partant des définitions des opérations, conduit graduellement à la manière de les effectuer. Le style plus concis a permis de réduire l'ouvrage de 444 pages à 298, sans supprimer rien d'essentiel.

Nous n'avons que des éloges à donner à la manière dont M. Tarnier a exposé les théories, souvent délicates, de l'Arithmétique. Nous ne nous permettrons que quelques critiques de détail.

Était-il bien nécessaire de dire (page 1) que : « un » nombre est plus ou moins grand suivant qu'il contient

» plus ou moins d'unités, » et que : « c'est pour cela que
» l'on regarde l'unité comme le terme de comparaison
» auquel on rapporte la grandeur des nombres. »

La numération aurait peut-être gagné à être divisée en deux parties, savoir, la nomenclature et la notation. Il y a là deux choses distinctes et successives dans l'ordre des idées, comme elles l'ont été dans l'ordre historique.

Enfin, tout en croyant, avec M. Tarnier, qu'on a souvent abusé des symboles littéraux en Arithmétique, nous ne pensons pas qu'on doive les écarter systématiquement. L'important est d'être clair et concis, et, dans chaque cas particulier, il nous paraît convenable d'employer sans scrupule, le fond restant le même, la forme la mieux appropriée à ce double but.

Malgré ce dissentiment, nous ne confondons pas le savant examinateur avec ces ennemis personnels de l'Algèbre qui font à cette science une guerre acharnée, et ont même exprimé publiquement le regret de ne pouvoir la supprimer. Nous reconnaissons même que M. Tarnier s'est tiré avec avantage de plusieurs passages qu'il était bien difficile de rendre en discours ordinaires, mais son exemple ne nous a pas converti.

La plus grave accusation que les ennemis dont nous parlions tout à l'heure portent à l'Algèbre, est de *fausser le jugement* (*). Il paraît difficile d'admettre qu'un pareil résultat soit produit par une méthode reconnue exacte, d'un consentement unanime. En quoi un raisonnement en langage ordinaire diffère-t-il d'un raisonnement en langage algébrique ? En rien, si ce n'est que les termes généraux servant à désigner un *individu quelconque* pris dans une *classe d'objets*, sont, dans l'un,

(*) La même accusation vient d'être portée par l'auteur d'un Traité d'arithmétique contre la règle de trois, la *regula aurea* des anciens. Pauvre règle de trois !

des mots très-longs ou même des périphrases, et, dans l'autre, des mots les plus courts possible, des mots d'une seule lettre. Comment une phrase sensée dans une langue peut-elle n'avoir pas le sens commun dans une autre, si la traduction est exacte? Les ennemis personnels de l'Algèbre feraient bien de nous expliquer ce paradoxe.

Nous ne prétendons pas qu'un savant algébriste ne puisse être un médiocre logicien : cela s'est vu et se voit encore ; mais l'Algèbre n'y est assurément pour rien. En général, on est trop porté, quand on discute une méthode, soit pour l'attaquer, soit pour la défendre, à faire bon marché de l'intelligence humaine, qu'on traite comme une matière inerte. Les bonnes méthodes ne font pas les bons esprits, mais les bons esprits seuls savent tirer parti des bonnes méthodes et quelquefois même des mauvaises.

Théorie des Logarithmes, conforme aux nouveaux Programmes d'enseignement; par *le même*. Paris, 1853. In-8, de II-96 pages.

On sait que les petites précautions font les grands calculateurs. Les détails les plus minimes ont leur importance, dès qu'il s'agit d'abréger un travail aride et de diminuer les chances d'erreurs. Il y a là un art qui ne peut sans doute s'acquérir que par beaucoup d'exercice; mais de bons préceptes peuvent en faciliter l'apprentissage. M. Tarnier rend donc un grand service aux jeunes élèves en leur présentant, à côté d'une théorie complète des logarithmes, un ensemble très-varié et très-bien choisi d'applications propres à servir de modèles. Nous engageons les élèves à refaire tous les calculs en suivant leurs propres inspirations, puis à comparer leur marche avec celle de l'auteur. Cette comparaison leur fera mieux apprécier toutes les finesses dont se compose l'art difficile de bien calculer.

DE LA VALEUR DU RAYON DE COURBURE D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE EN UN POINT D'INFLEXION OU DE REBROUSSEMENT;

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Le rayon de courbure d'une courbe algébrique en un point d'inflexion ou de rebroussement est, en général, nul ou infini. Toutefois, dans le cas d'un point de rebroussement de seconde espèce, la valeur de ce rayon peut ne pas être nulle ni infinie. Ces circonstances méritent d'être examinées avec soin, et les notions qui se rattachent à cet ordre de considérations sont susceptibles d'applications importantes. Par exemple, la possibilité d'obtenir au foyer des télescopes des images suffisamment claires tient essentiellement à ce que les rayons de courbure des caustiques sont nuls en leurs points de rebroussement.

Points d'inflexion. Supposons que l'on ait pris pour axes des x et des y la tangente et la normale à la courbe au point que l'on considère. L'équation de celle-ci pourra être mise sous la forme

$$y = x^{\alpha} v,$$

α étant un nombre, et v une fonction de x, rationnelle ou non, qui ne devient pas nulle pour $x = 0$. Quant à l'exposant α, nous le mettrons sous la forme $\frac{m}{n}$, m et n étant deux entiers positifs premiers entre eux. On voit immédiatement que si m et n sont impairs, y change de signe avec x, et ne cesse pas d'être réel. D'un autre côté,

on a

$$\frac{dy}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} v + x^{\alpha} \frac{dv}{dx};$$

d'où il résulte que si α est plus grand que 1, ou $m > n$, le premier terme de $\frac{dy}{dx}$ s'annule pour $x = 0$. Si nous admettons en même temps que $\frac{dv}{dx}$ ne devient pas infini pour $x = 0$, ou plutôt que $x^{\alpha} \frac{dv}{dx}$ devient nul, l'origine des coordonnées sera bien un point d'inflexion de la courbe, dans les conditions mêmes que nous avons supposées.

On a, d'ailleurs,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha-2} v + 2\alpha x^{\alpha-1} \frac{dv}{dx} + x^{\alpha} \frac{d^2 v}{dx^2};$$

et, par conséquent, la valeur du rayon de courbure, donnée, comme on sait, par l'expression

$$\pm \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}},$$

devient

$$\frac{\left[1 + \left(\alpha x^{\alpha-1} v + x^{\alpha} \frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\alpha(\alpha - 1) x^{\alpha-2} v + 2\alpha x^{\alpha-1} \frac{dv}{dx} + x^{\alpha} \frac{d^2 v}{dx^2}}.$$

Comme on peut toujours prendre les x positifs du côté où l'ordonnée y est positive, et conséquemment $\frac{d^2 y}{dx^2} > 0$, je ne me préoccupe pas du double signe. Cela posé, pour toutes les valeurs de α plus grandes que 2, le dénominateur sera nul pour $x = 0$, et le numérateur se réduira à l'unité, pourvu toutefois que $x^\alpha \frac{d^2 v}{dx^2}$ devienne nul, ce que nous admettons. Donc le rayon de courbure est alors infini.

Pour les valeurs de α comprises entre 1 et 2, le numérateur se réduit à l'unité; mais le dénominateur devient infini à cause du terme $\alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}v$. Le rayon de courbure est donc alors égal à zéro.

$\alpha = 2$ ne donne pas de point d'inflexion, car l'équation de la courbe est $y = x^2 v$, et y conserve le même signe lorsque x passe du positif au négatif.

Nous voyons par là que le nombre des cas où le rayon de courbure est nul est fort petit relativement à ceux où ce rayon est infini, puisque les premiers n'ont lieu que pour des valeurs de α comprises entre 1 et 2, tandis que les autres correspondent aux valeurs de α plus grandes que 2.

Points de rebroussement. Prenons encore pour axes des x et des y la tangente et la normale : l'équation de la courbe pourra être mise sous la forme

$$y = u + x^\alpha v,$$

u étant la demi-somme des ordonnées des deux branches correspondant à une même abscisse, et v une fonction de x, rationnelle ou non, telle que $x^\alpha \frac{dv}{dx}$ et $x^\alpha \frac{d^2 v}{dx^2}$ deviennent nuls pour $x = 0$: on a en même temps $\frac{du}{dx} = 0$. Il y aura rebroussement si $x^\alpha v$ devient imaginaire pour des valeurs négatives de x, et admet deux valeurs réelles et de signes contraires pour des valeurs positives de x. On satisfait à cette double condition en prenant $\alpha = \frac{m}{2n}$, m et $2n$ étant premiers entre eux. Il faut d'ailleurs que l'on ait $\alpha > 1$, sans quoi $\frac{dy}{dx}$ ne serait pas nul pour $x = 0$.

Cela posé, nous aurons pour la valeur du rayon de courbure

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{du}{dx} + \alpha x^{\alpha - 1} v + x^{\alpha} \frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 u}{dx^2} + \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2} v + 2\alpha x^{\alpha - 1} \frac{dv}{dx} + x^{\alpha} \frac{d^2 v}{dx^2}}.$$

$\frac{d^2 u}{dx^2}$ est, pour $x = 0$, la valeur inverse du rayon de courbure de la courbe, lieu des points milieux des cordes parallèles à l'axe des y. Quand cette valeur est nulle, le rebroussement est de *première espèce*. Dans le cas contraire, le rebroussement est de *seconde espèce*.

Dans le premier cas, le rayon de courbure de la courbe proposée est infini pour $\alpha > 2$, car le dénominateur est alors nul, et le numérateur se réduit à l'unité. Pour α compris entre 1 et 2, le rayon de courbure est nul, car le dénominateur devient infini à cause du terme

$$\alpha(\alpha - 1) x^{\alpha - 2} v.$$

$\alpha = 2$ ne donne pas de point de rebroussement.

On peut donc dire que, dans le plus grand nombre de cas, le rayon de courbure en un point de rebroussement de première espèce est infini.

Quand le rebroussement est de seconde espèce, le rayon de courbure se réduit à $\frac{1}{\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)}$ pour $\alpha > 2$, et il est nul pour α compris entre 1 et 2. Ainsi donc, le rayon de courbure en un point de rebroussement de seconde espèce est, le plus généralement, différent de zéro, sans être infini.

Je terminerai en faisant remarquer que ces points de rebroussement peuvent être divisés en deux classes, la première correspondant au cas où le point correspondant de la développée est un point d'inflexion, et la seconde à celui où ce point est lui-même de rebroussement. Il y a inflexion quand le coefficient différentiel du rayon de courbure n'est pas nul pour $x = 0$, et rebroussement quand ce coefficient différentiel s'annule.

Or, le coefficient différentiel de l'expression générale du rayon de courbure est

$$\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left\{3\,\frac{dy}{dx}-\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\right\}.$$

Comme $\frac{dy}{dx}$ s'annule pour $x = 0$, nous n'avons à considérer que $-\frac{\left(\frac{dy^3}{dx^3}\right]}{\left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)^2}$. Or,

$$\frac{dy^3}{dx^3}=\frac{d^3u}{dx^3}+\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\,x^{\alpha-3}\,v+3\alpha(\alpha-1)\,x^{\alpha-2}\,\frac{dv}{dx}$$
$$+\,3\alpha x^{\alpha-1}\,\frac{d^2v}{dx^2}+x^{\alpha}\,\frac{d^3v}{dx^3},$$

et nous voyons que pour $\alpha > 3$, les quatre derniers termes s'évanouissent pour $x = 0$, pourvu que $\frac{d^3v}{dx^3}$ ne puisse devenir infini ; ce que nous admettons ici. D'un autre côté,

$\frac{d^2y}{dx^2}$ se réduit à $\frac{d^2u}{dx^2}$, donc le cas le plus général est celui d'un point d'inflexion. Pour $\alpha < 3$, le terme

$$\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}v$$

devient infini lorsqu'on fait $x=0$; donc alors le rayon de courbure est un maximum ou un minimum, et l'on a, dans la développée, un point de rebroussement.

Pour compléter cette discussion, il faudrait examiner divers cas particuliers, mais cela nous mènerait trop loin : je laisse ce soin au lecteur.

SOLUTION DE LA QUESTION 81

(voir t. III, p. 40);

Par M. HOUSEL,
Professeur.

Chercher une courbe telle, que sa polaire, relativement à un cercle donné, soit égale à la courbe elle-même (t. III, p. 40).

Prenons le centre du cercle pour origine, x et y étant les coordonnées de la courbe cherchée, X et Y celles qui correspondent dans la polaire; on sait que $Xx + Yy = r^2$, r étant le rayon du cercle. Mais il est plus commode de prendre les coordonnés polaires, ce qui donne

$$x = r\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi,$$

l'équation de la courbe cherchée devenant

$$\rho = f(\varphi).$$

Avant d'introduire la condition que l'enveloppe des polaires soit égale à la courbe cherchée, nous allons considérer cette fonction comme quelconque, et l'équation de la courbe enveloppe sera

$$\mathrm{R} = \mathrm{F}(\omega),$$

F devant être déterminé d'après f. Alors on a

$$\mathrm{X} = \mathrm{R}\cos\omega, \quad \mathrm{Y} = \mathrm{R}\sin\omega,$$

et l'équation de chaque polaire devient

$$\mathrm{R}\rho(\cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi) = r^2,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{R}\rho\cos(\varphi - \omega) = r^2.$$

Comme cette équation correspond à deux valeurs consécutives de ρ et de φ, pour chaque valeur de R et de ω, il faut la différentier par rapport à ρ et à φ, et comme

$$\rho = \frac{r^2}{\mathrm{R}\cos(\varphi - \omega)},$$

on a

$$\frac{\mathrm{R}\,d\rho}{r^2} = -\frac{d\cos(\varphi - \omega)}{\cos^2(\varphi - \omega)} = \frac{\sin(\varphi - \omega)\,d\varphi}{\cos^2(\varphi - \omega)};$$

on peut, dans cette équation, poser $\frac{d\rho}{d\varphi} = \rho'$, et remplacer $\cos(\varphi - \omega)$ par sa valeur, ce qui donnera

$$\cos(\varphi - \omega) = \frac{r^2}{\mathrm{R}\rho}$$

et

$$\sin(\varphi - \omega) = \frac{r^2\rho'}{\mathrm{R}\rho^2}.$$

Cela suffit pour déterminer F dans le cas général, car la valeur du cosinus donne φ en fonction de R, de ω et de r^2, celle du sinus donne ρ de la même manière, puisque $\rho' = f'(\varphi)$, et ces valeurs, transportées dans $\rho = f(\varphi)$, donnent la relation cherchée entre R et ω.

Mais, au lieu de poser

$$R = F(\omega),$$

posons

$$R = F(\alpha - \omega)$$

(ce qui est permis puisque F indique n'importe quelle fonction), α étant un angle constant, et ω, comme ci-dessus, l'angle que R forme avec l'axe. On a aussi

$$R = \frac{r^2}{\rho \cos(\varphi - \omega)},$$

et différentiant par rapport à R et ω, il vient

$$\frac{\rho\, dR}{r^2} = -\frac{d \cos(\varphi - \omega)}{\cos^2(\varphi - \omega)} = \frac{\sin(\varphi - \omega)\, d(\varphi - \omega)}{\cos^2(\varphi - \omega)}$$
$$= \frac{\sin(\varphi - \omega)\, d(\alpha - \omega)}{\cos^2(\varphi - \omega)}.$$

On voit donc que

$$\frac{R\, d\rho}{d\varphi} = \frac{r^2 \sin(\varphi - \omega)}{\cos^2(\varphi - \omega)} = \frac{d(\alpha - \omega)}{\rho\, dR},$$

et

$$\frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)} = \frac{F'(\alpha - \omega)}{F(\alpha - \omega)}.$$

Ce résultat est intéressant par lui-même, mais revenons à la question, et supposons que la polaire ne soit autre chose que la courbe primitive qui a tourné d'un angle α; les fonctions f et F seront les mêmes, et, par conséquent,

$\frac{f'(\varphi)}{f(\varphi)}$ sera constant. Posons donc

$$\frac{\rho'}{\rho} = \mathrm{C}, \quad \text{ou} \quad \text{bien} \quad \frac{d\rho}{\rho} = \mathrm{C}\,d\varphi,$$

il en résulte

$$\log \rho = \mathrm{C}\varphi + \mathrm{C}_1 \quad \text{et} \quad \rho = e^{\mathrm{C}\varphi + \mathrm{C}_1},$$

ce qui représente une *spirale logarithmique* dont on sait que la développée jouit d'une propriété analogue.

On verra, dans un prochain article, par une méthode appliquée à l'hélice conique, que cette polaire de la spirale logarithmique n'est pas toujours identique à la proposée. Soit

$$\rho = me^{\cot\beta . \varphi}$$

l'équation de la spirale donnée, β étant l'angle que fait la tangente avec le rayon vecteur; l'équation de la polaire sera

$$\mathrm{R} = -\frac{r^2}{m \sin\beta}\, e^{\cot\beta . (90 + \beta\omega)}.$$

Donc les deux courbes seront toujours semblables, mais, pour qu'elles soient identiques, sauf la position, il faudra que l'on ait

$$r^2 = m^2 \sin\beta.$$

C'est donc par erreur qu'on a mis pour équation de la courbe cherchée,

$$\rho = \operatorname{tang}\varphi.$$

Note. M. Gennochi (Angelo) fait observer qu'on a peut-être confondu $\rho = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ avec $\rho = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, équation de la parabole apollonienne, car on peut choisir le cercle directeur, de manière que la polaire réciproque d'une parabole soit une parabole égale. Cette propriété appartient même aux paraboles et aux hyperboles de tous les ordres. En effet, si

$$y^n = px^m$$

est l'équation de la courbe donnée, et

$$x^2 + y^2 = r^2$$

celle du cercle directeur, on trouve sans peine que la polaire réciproque est

$$p\left(\frac{-y}{n}\right)^n = \left(\frac{m-n}{r^2}\right)^{m-n}\left(\frac{x}{m}\right)^m,$$

qui peut se réduire à l'équation de la courbe donnée par une détermination convenable de r.

SUR LE RAPPORT DE L'ARC A LA CORDE;

Par M. LEBESGUE.

Soient AOB un secteur circulaire de rayon r, et $\alpha o \beta$ un triangle isocèle, αo, βo étant pris à partir du centre sur les rayons AO, BO. On peut concevoir un nouveau secteur de même angle O (semblable), et dont l'arc soit équivalent à $\alpha\beta$, et le rayon ρ. On peut aussi concevoir un autre secteur encore d'angle O, mais dont la surface soit équivalente à $\alpha o \beta$, et le rayon ρ_1. On a, d'après cela,

$$\frac{\text{AB}}{\alpha\beta} = \frac{r}{\rho}, \quad \frac{\text{sec AOB}}{\alpha o \beta} = \frac{r^2}{\rho_1^2}.$$

Si l'on appelle a la hauteur du triangle isocèle, on trouvera immédiatement

$$a\rho = \rho_1^2.$$

Si donc on savait trouver ρ et ρ_1, ou simplement ρ, on aurait le rapport de l'arc à une ligne donnée, à sa corde par exemple, à son sinus, à sa tangente, etc., et des rapports analogues pour les secteurs. Or, si l'on appelle b le côté du triangle isocèle et sa base, $\alpha\beta = 2c$. Legendre a montré que si l'angle au sommet du triangle isocèle, ainsi que sa surface, devenait moitié, on aurait

$$a' = \sqrt{a\left(\frac{a+b}{2}\right)}, \qquad b' = \sqrt{ab},$$

et Schwab a montré (*voir* les *Géométries* de M. Vincent, de M. Amiot, etc.), que si l'angle au sommet devenait moitié, ainsi que la base, a et b deviendraient

$$a' = \frac{1}{2}(a+b), \qquad b' = \sqrt{b\left(\frac{a+b}{2}\right)},$$

Ainsi il suffirait d'opérer m bissections et d'assembler 2^m triangles isocèles pour en former un secteur polygonal de 2^m côtés (rayons non compris), et l'on pourrait prendre m assez grand pour qu'il fût permis de considérer le secteur polygonal comme un secteur circulaire de rayon ρ ou ρ_1. Ce moyen de trouver le rapport de l'arc à sa corde, et, par suite, le rapport de la circonférence au diamètre, est bien plus long que l'emploi de la formule

$$\text{arc}\,(\text{tang} = x) = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^5}{5}, \ldots,$$

surtout quand on emploie l'artifice indiqué dans le Programme d'admission à l'École Polytechnique.

La méthode de Schwab pourrait conduire à la formule

$$\text{arc}\,(\text{tang} = x) = x - \frac{x^3}{3} + \ldots,$$

mais bien plus longuement que la méthode des dérivées. C'est un exercice d'élimination qui n'est pas inutile.

THÉORÈME COMBINATOIRE DE M. STERN,

DÉMONTRÉ PAR M. A.,
Capitaine d'Artillerie.

1. *Notation.* $C_n'^p =$ classe combinatoire d'ordre p, avec n éléments $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ et *avec répétition;* $C_n^p =$ id, *sans répétition.*

2. Théorème.

$$C_n'^p - C_n^1 C_n'^{p-1} + C_n^2 C_n'^{p-2} - C_n^3 C_n'^{p-3} + \ldots (-1)^n C_n^p = 0.$$

Démonstration. Désignons cette série par S_n^p; $C_n'^p$ est évidemment le coefficient de h^p dans le produit infini

$$P = (1 + a_1 h + a_1^2 h^2 + \ldots)(1 + a_2 h + a_2^2 h^2 + \ldots)(1 + a_3 h + a_3^2 h^2 + \ldots)\ldots;$$

donc

$$1 + C_n'^1 h + C_n'^2 h^2 + \ldots = P = \frac{1}{(1 - a_1 h)(1 - a_2 h)\ldots(1 - a_n h)};$$

d'où l'on tire, en faisant disparaître le dénominateur qui n'est autre que $1 - C_n h + C_n^2 h^2 - C_n^3 h^3 + \ldots + (-1)^n C_n^n h^n$,

$$1 = 1 + \Sigma_p S_n^p h^n;$$

donc

$$S_n^p = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note du rédacteur. J'ai donné une démonstration, mais bien moins simple, du même théorème, dans le *Journal de Mathématiques,* tome III, page 559.

THÉORÈME DE M. STEINER SUR LES CERCLES OSCULATEURS

(voir t. XII, p. 119),

DÉMONTRÉ PAR M. A.,
Capitaine d'Artillerie.

THÉORÈME. *Par un point pris dans le plan d'une ligne de degré n passent $3n(n-1)$ cercles de courbure de la courbe. Si le point est sur la courbe, ce nombre est diminué de deux unités.*

Démonstration. Soit

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de degré n d'une courbe plane, rendue homogène par l'introduction de la variable z. Si, pour abréger, on pose, comme dans le Mémoire de Jacobi sur les tangentes doubles (tome XII, page 150),

$$f(x, y, z) = 0, \quad \frac{df}{dx} = a, \quad \frac{df}{dy} = b, \quad \frac{df}{dz} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2(h) &= f(x + ah, y - ah, z) = u_2 h^2 + u_3 h^3 + \ldots + u_n h^n,\\
\varphi_1(h) &= f(x - ch, y, z + ah) = v_2 h^2 + v_3 h^3 + \ldots + v_n h^n,\\
\varphi(h) &= f(x, y + ch, z - bh) = w_2 h^2 + w_3 h^3 + \ldots + w_n h^n,
\end{aligned}$$

on aura

$$(1) \quad u_2 x^2 = w_2 z^2, \quad u_2 y^2 = v_2 z^2 \qquad \text{(tome XII, page 151).}$$

Cela posé, le lieu des points d'osculation, en prenant le point donné pour origine, est

$$(y^2 + x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = 0.$$

équation dans laquelle il faut mettre pour $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, leurs valeurs tirées de l'équation

$$f(x, y, z) = 0.$$

Or.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{b}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\frac{d^2f}{dx^2}b^2 - 2\frac{d^2f}{dx\,dy}ab + \frac{d^2f}{dy^2}a^2}{b^3} = -\frac{2u_2}{b^3};$$

donc. en substituant, on aura

$$(2) \qquad -(y^2 + x^2)u_2 + (ax + by)(a^2 + b^2) = 0.$$

Mais l'équation

$$f(x, y, z) = 0$$

étant homogène, on a

$$ax + by + cz = 0,$$

et, d'après l'équation (1), on a

$$(\mathrm{A}) \qquad (y^2 + x^2)u_2 = (v_2 + w_2)z^2;$$

par suite, l'équation (2) devient

$$(v_2 + w_2)z + c(a^2 + b^2) = 0,$$

équation de degré $3(n-1)$. En combinant cette équation avec celle de la courbe donnée, on obtient $3n(n-1)$ points d'osculation; si le point est sur la courbe, il est visible, à cause de l'équation

$$ax + by + cz = 0,$$

que $f\ \frac{df}{dz}$ et $\frac{d^2f}{dz^2}$ s'annulent pour $x = 0$, $y = 0$; donc la courbe représentée par l'équation (A) passe par le point donné: ce qui est évident à priori.

Note du rédacteur. Le nombre des tangentes qu'on peut mener d'un point donné à a courbe est $n(n-1)$; mais lorsque le point est sur la courbe, la tangente qui passe par ce point est la même que celle qui passe par le point consécutif, de sorte qu'en ce point deux solutions se réduisent à une seule et le nombre des tangentes est $n(n-1)-1$; de même, lorsqu'il s'agit d'un cercle osculateur, le même cercle appartient à trois points consécutifs, et trois solutions se réduisent à une seule, de sorte que le nombre de cercles osculateurs, lorsque le point est sur la courbe, est $3n(n-1)-2$. Le même genre de raisonnement s'applique à des osculations de tout ordre.

QUESTION DE MINIMUM RELATIVE AUX VOIES DE TRANSPORT;

PAR M. J.-CH. DUPAIN,
Professeur au Lycée de Rennes.

Un voyageur veut se rendre du point C au point A; il a à sa disposition une ligne de chemin de fer AB' qui ne passe pas au point C; chemin qu'il faut aller rejoindre par une route de terre CM. On demande de déterminer la position du point M de telle sorte que la durée du voyage soit la plus petite possible.

Du point C j'abaisse CB perpendiculaire sur AB',

$$BC = a, \quad AB = c,$$

V vitesse sur le chemin de fer,
V' vitesse sur le chemin de terre.

$$m = \frac{V'}{V}, \quad CM = x,$$

Nous aurons

$$AM = c - \sqrt{x^2 - a^2}.$$

En représentant par t la durée du trajet,

$$(1) \qquad t = \frac{c - \sqrt{x^2 - a^2}}{V} + \frac{x}{V'};$$

en égalant à o la dérivée de t par rapport à x, on a

$$\frac{-x}{V\sqrt{x^2 - a^2}} + \frac{1}{V'} = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{aV}{\sqrt{V^2 - V'^2}},$$

$$(2) \qquad x = \frac{a}{\sqrt{1 - m^2}}:$$

on s'assure aisément que c'est une valeur minimum. La valeur correspondante de t est

$$(3) \qquad \frac{1}{V}\left(c + \frac{a}{m}\sqrt{1 - m^2}\right);$$

on arrive au même résultat en développant l'équation (1) et en disposant de t de manière à rendre les deux racines égales.

L'équation (2) donne aisément

$$m = \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}};$$

or,

$$\frac{a}{x} = \cos BCM,$$

donc

$$m = \sin BCM.$$

Si l'on avait besoin de connaître BM, on le calculerait facilement au moyen de l'équation (2),

$$BM = \frac{am}{\sqrt{1 - m^2}}.$$

On calculera simplement une valeur approchée de x, en remarquant que $\sqrt{1-m^2}$ est à peu près égal à $1-\frac{m^2}{2}$ et que $\frac{1}{1-\frac{m^2}{2}}$ est à peu près égal à $1+\frac{m^2}{2}$.

On se ferait une idée plus nette de l'approximation en développant $\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}$ en série,

$$\frac{1}{\sqrt{1-m^2}} = 1+\frac{m^2}{2}+\frac{3}{8}m^4+\ldots.$$

En ne conservant que $1+\frac{m^2}{2}$, on néglige donc la quatrième puissance de m et les puissances supérieures.

Posons donc

$$x = a\left(1+\frac{m^2}{2}\right).$$

Nous pouvons admettre qu'en France m varie de $\frac{1}{4}$ à $\frac{1}{8}$; la plus grande valeur de x serait donc

$$a\,(1,03125),$$

la plus petite

$$a\,(1,0078125).$$

La ligne CM différera donc toujours peu de CB; s'il s'agissait d'une dépêche transmise par le télégraphe électrique, m serait infiniment petit et l'on aurait $x=a$; la voie la plus rapide serait CBA.

Les formules deviennent illusoires si m n'est pas inférieur à 1, c'est-à-dire si la vitesse par le chemin de terre n'est pas inférieure à la vitesse par le chemin de fer. Il est facile de reconnaître qu'alors la voie la plus courte serait CA.

On pourrait encore se demander quelle est la route la plus économique ; en appelant p le prix de 1 kilomètre sur la route de terre, p' le prix de 1 kilomètre sur le chemin de fer, et en posant

$$n = \frac{p}{p'},$$

on arrive, par des calculs analogues aux précédents, à

$$x = \frac{a}{\sqrt{1 - n^2}}.$$

n diffère généralement peu de l'unité, de sorte que la voie la plus rapide n'est pas la plus économique (*).

NOTE SUR LA THÉORIE DES ASYMPTOTES (**);

PAR M. PAUL SERRET,
Professeur.

1. La détermination des coefficients angulaire et linéaire des asymptotes, telle qu'elle résulte de la méthode de M. Cauchy, repose, comme on sait, sur cette hypothèse, que l'on peut représenter l'ordonnée d'une branche de courbe ayant une asymptote dont l'équation est

$$y = cx + d$$

par une somme de deux parties dont la première est l'ordonnée même de l'asymptote, et la seconde une fonc-

(*) On a : pour infanterie, $n = \frac{1}{2}$; cavalerie, $n = \frac{1}{6}$; artillerie, $n = \frac{1}{15}$.

(**) *Voir* VANNSON, tome VIII, page 308. TM.

tion V de x et y, qui tend vers zéro quand x et y tendent vers l'infini.

Or, quoique, au point de vue théorique, la possibilité d'une pareille expression pour l'ordonnée de la courbe ne paraisse point douteuse, on doit convenir cependant qu'il est fâcheux qu'une théorie aussi importante que celle dont il s'agit, repose sur une transformation que l'on ne pourra réaliser que dans quelques cas très-particuliers.

On doit remarquer, en outre, que, dans la méthode de M. Cauchy, il n'existe aucune liaison entre les deux problèmes qui consistent à rechercher les asymptotes parallèles aux axes des x et des y, *ou* les asymptotes qui rencontrent ces axes. On comprend bien cependant, à priori, que ces deux problèmes peuvent être ramenés à dépendre l'un de l'autre, et que la détermination des asymptotes parallèles aux x et aux y, à laquelle on parvient d'une manière très-simple, par une méthode exempte de toute obscurité, et ne nécessitant aucune hypothèse, doit conduire à la détermination des asymptotes qui rencontrent ces axes. Ces considérations m'ont conduit à une théorie nouvelle, qui ne paraît présenter aucun des inconvénients de l'ancienne, et qui conduit d'ailleurs aux mêmes résultats par une voie aussi simple.

2. Première partie. *Détermination des asymptotes parallèles aux axes des x et des y.*

Les raisonnements ordinaires nous conduiront à la règle suivante :

Si $y = b$ représente une asymptote parallèle à ox, et si $x^m \varphi(y)$ représente l'ensemble des termes de l'équation de la courbe qui renferment la plus haute puissance de x, l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, b, sera l'une des racines réelles de l'équation

$$\varphi(y) = 0.$$

Corollaire. On déduit de cette règle les conséquences suivantes :

1°. *Pour que la courbe ait au moins une asymptote parallèle à ox, il faut que la plus haute puissance de x qui entre dans l'équation soit multipliée par une fonction de y ;*

2°. *Pour obtenir l'ordonnée à l'origine de l'asymptote parallèle à ox, il suffit d'égaler à zéro la fonction de y qui multiplie la plus haute puissance de x, et de chercher les racines réelles de l'équation résultante.*

Ces considérations vont nous permettre de déterminer par un même calcul les coefficients angulaire et linéaire des asymptotes qui rencontrent les axes.

Remarque. On parviendrait de la même manière à une règle semblable pour les asymptotes parallèles à oy.

3. Deuxième partie. *Détermination des asymptotes non parallèles à oy.*

Soient

$$y = cx + d$$

une asymptote non parallèle à oy, et

$$(1) \qquad x^m f_1\left(\frac{y}{x}\right) + x^{m-1} f_2\left(\frac{y}{x}\right) + \ldots = 0$$

l'équation de la courbe, mise sous la forme ordinaire.

Menons par l'origine des axes actuels, ox' parallèle à l'asymptote, et passons du système d'axes ox, oy au système ox', oy ; les formules de transformation seront

$$x = kx', \quad y = y' + cx = y' + ckx',$$

d'où

$$(2) \qquad \begin{cases} x = kx', \\ \dfrac{y}{x} = c + \dfrac{y'}{kx'}, \end{cases}$$

k étant un nombre.

Substituant à x et à $\frac{y}{x}$, dans l'équation (1), leurs valeurs tirées de l'équation (2), il viendra, pour l'équation de la courbe par rapport aux nouveaux axes,

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{r} k^m x'^m\left[f_1(c)+\frac{y'}{kx'}f'_1(c)+\frac{A}{x'^2}\right] \\ +\,k^{m-1}x'^{m-1}\left[f_2(c)+\frac{B}{x'}\right]+x'^{m-2}C \end{array}\right\}=0.$$

Or, la courbe ayant une asymptote parallèle à l'axe actuel des x, ox' :

1°. Il est nécessaire que le multiplicateur *numérique* de la plus haute puissance m de x' s'annule, ce qui donne l'équation

$$(\text{I})\qquad f_1(c)=0,$$

laquelle détermine les coefficients angulaires des asymptotes ;

2°. D'après l'équation de condition (I), x'^{m-1} est la plus haute puissance de x' qui persiste dans l'équation (3), son multiplicateur est $k^{m-1}[y'f'_1(c)+f_2(c)]$; nous devons donc, d'après ce qui précède, l'égaler à zéro, et la valeur de y' satisfaisant à l'équation

$$y'f'_1(c)+f_2(c)=0,$$

nous donnera l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, à savoir

$$(\text{II})\qquad y'=d=-\frac{f_2(c)}{f'_1(c)}.$$

Remarque I. Si une racine réelle et multiple de l'équation (I) annulait $f_2(c)$, x'^{m-1} ne serait plus la plus haute puissance de x' entrant dans l'équation (3) ; mais x'^{m-2} étant alors la plus haute puissance de x' persistant dans l'équation, son multiplicateur égalé à zéro fournira une équation du second degré en y', dont les racines réelles fourniront les coefficients linéaires de deux asymptotes parallèles à ox', correspondant à la racine multiple de l'équation (I), que nous considérons.

Remarque II. Il est peut-être inutile de faire observer que l'ordonnée à l'origine d'une asymptote par rapport aux axes ox', oy, est aussi l'ordonnée à l'origine par rapport aux axes primitifs ox, oy.

BIBLIOGRAPHIE.

OMAR ALKHAYYAMI (XIe siècle, vers la fin).

L'Algèbre d'Omar Alkhayyami, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits, par *M. F. Woepcke*, docteur agrégé à l'Université de Bonn, membre de la Société asiatique de Paris. Paris, 1851. Typographie de Firmin Didot, frères. In-8°, XIX-127 pages.

La traduction est suivie du texte arabe, de 41 pages, 4 planches de 41 figures.

Les prix des objets se règlent, non sur les besoins matériels, mais sur les jouissances esthétiques ou intellectuelles qu'elles procurent, et particulièrement sur leur rareté. C'est ainsi que, jouant d'un instrument pendant une seule soirée, Paganini sera mieux rétribué que les travaux de cent laboureurs, pendant une année entière, et cette appréciation est de toute justice; car il y a des millions de laboureurs et un seul Paganini. Sous ce point de vue, l'érudition orientale est aussi la plus précieuse, surtout quand elle se rapporte à l'histoire de l'esprit humain, à celle des sciences. Les vrais philosophes, ceux qui s'intéressent aux sciences exactes, méritant seuls ce nom, doivent donc applaudir aux efforts de M. Woepcke pour nous faire connaître l'état des mathématiques chez les Arabes.

En 1851, l'excellent géomètre arabiste a donné un extrait de l'ouvrage dont nous possédons maintenant le texte complet avec une traduction qui ne laisse rien à désirer, grâce aux éclaircissements et aux notes qui traduisent en formules modernes, courtes et claires, la phraséologie longue et quelquefois ambiguë de l'original; il faut se rappeler que les Arabes n'emploient aucun caractère symbolique, aucun signe, tout est discursif, *parlé*. Nous avons déjà donné une analyse de cette remarquable production (tome IX, page 389; 1850) : ce n'est pas une application de l'algèbre à la géométrie, mais, au contraire, une application de la géométrie à l'algèbre. Il s'agit de la construction géométrique des équations du deuxième et du troisième degré; bien entendu, des équations *numériques*. Les littérales ne datent que de Viète. Pour ramener les équations aux dimensions de l'étendue, Alkhayyâmî les rend homogènes, en introduisant l'unité. Exemple : $2x^2 - 3x = 5$; il écrit $2x^2 - 3.1.x = 5.1$; x étant une ligne, on a trois surfaces. Pour les équations cubiques, on a des solides, et, au moyen de l'intersection de deux coniques, Alkhayyâmî parvient à l'égalité de deux solides comme dans nos Traités élémentaires. Il n'est jamais question ni des racines négatives et encore moins des racines imaginaires; les valeurs négatives sont nommées *impossibles*. N'admettant que des solutions positives, l'auteur ne trace que des demi-coniques, des demi-paraboles, des demi-hyperboles, etc.; mais il a toujours soin de démontrer que les courbes doivent se couper; ce qui est souvent le point difficile. Voici, du reste, comment l'auteur annonce son but :

« Une des théories mathématiques dont on a besoin » dans la partie des sciences philosophiques, connue » sous le nom des *Sciences mathématiques*, c'est l'art » de l'algèbre, lequel a pour but la détermination des » inconnues, soit numériques, soit géométriques. Il se » rencontre dans cette science des problèmes, dépendant » de certaines espèces très-difficiles de théorèmes préli» minaires, dans la solution desquels ont échoué la plu» part de ceux qui s'en sont occupés. Quant aux anciens » (par là il désigne les Grecs), il ne nous est pas parvenu » d'eux d'ouvrage qui en traite; peut-être, après en avoir » cherché la solution et après les avoir étudiés, n'en » avaient-ils pas pénétré les difficultés; ou peut-être leurs » recherches n'en exigeaient pas l'examen; ou enfin, leurs » ouvrages à ce sujet, s'il y en a, n'ont pas été traduits » dans notre langue. Quant aux modernes, c'est Almâ» hâni (*), qui, parmi eux, conçut l'idée de résoudre » algébriquement le théorème auxiliaire employé par » Archimède dans la quatrième proposition du livre II » de son Traité de la sphère et du cylindre; or, il fut » conduit à une équation renfermant des cubes, des » carrés et des nombres, qu'il ne réussit pas à résoudre, » après en avoir fait l'objet d'une longue méditation. On » déclara donc que cette résolution était impossible, » jusqu'à ce que parut Aboû Diafar Alkhâsin (**), qui

(*) Mohammed ben Içâ Abou Abadallah Almâhâni, né à Bagdad, auteur de plusieurs ouvrages de Mathématiques.

(**) On ne connait pas son véritable nom, mais seulement ce surnom.

» résolut l'équation à l'aide des sections coniques. Après » lui, tous les géomètres avaient besoin d'un certain nom- » bre des espèces des susdits théorèmes, et l'un en réso- » lut une, et l'autre une autre. Mais aucun d'eux n'a » rien émis sur l'énumération de ces espèces, ni sur l'ex- » position des cas de chaque espèce, ni sur leurs dé- » monstrations, si ce n'est relativement à deux espèces, » que je ne manquerai pas de faire remarquer. Moi, au » contraire, je n'ai jamais cessé de désirer vivement de » faire connaître avec exactitude toutes ces espèces, ainsi » que de distinguer parmi les cas de chaque espèce les » possibles d'avec les impossibles, en me fondant sur » des démonstrations; car je savais combien est urgent le » besoin de ces théorèmes dans les difficultés des pro- » blèmes. » (Page 1-2.)

Le problème d'Archimède cité est la cinquième proposition du livre II (non la quatrième); il s'agit de couper la sphère par un plan, de manière que le rapport des volumes des deux segments soit égal à un rapport donné. Ainsi, c'est un problème d'algèbre appliquée à la géométrie qui, chez les Arabes, a donné naissance à l'application de la géométrie à l'algèbre. Voici comment notre auteur définit l'algèbre : « Avec l'assistance de Dieu et » avec son concours précieux, je dis que l'algèbre est un » art scientifique. Son objet, ce sont le nombre absolu » et les grandeurs mesurables, étant inconnus, mais rap- » portés à quelque chose de connu, de manière à pouvoir » être déterminés; cette chose connue est une quantité » ou un rapport individuellement déterminé, ainsi qu'on » le reconnait en les examinant attentivement; ce qu'on » cherche dans cet art, ce sont les relations qui joignent » les données des problèmes à (l'inconnue), qui de la » manière susdite forme l'objet de l'algèbre. La perfec- » tion de cet art consiste dans la connaissance des mé-

» thodes mathématiques au moyen desquelles on est en
» état d'effectuer le susdit genre de détermination des
» inconnues, soit numériques, soit géométriques. » (P. 5.)

Cette définition, très-exacte, est celle qu'on adopte encore aujourd'hui.

Dans tout le cours de l'ouvrage, l'auteur montre une connaissance parfaite de la géométrie des Grecs et une grande habileté à la manier. Les divers cas des problèmes sont discutés avec beaucoup de perspicacité et même de profondeur. Il sait même qu'aux racines égales correspondent des contacts dans les coniques ; observation dont il comprend l'importance et qu'il dit avoir faite le premier. Il est vrai que dans ce cas il n'admet qu'une seule racine et ne distingue pas deux racines égales. Il y a même des cas où, pour l'équation cubique, il assigne des limites aux coefficients, pour que deux racines soient positives, possibles ou impossibles. C'est pour l'équation XVII (page 40), et selon notre système d'écriture $x^3 + a = cx^2$.

Il déclare impossible la construction géométrique des equations du quatrième degré. Je ne sache pas que les Grecs non plus aient construit de telles équations.

Le titre complet du texte est :

Mémoire du sage excellent Ghiyath Eddin Aboul Fath Omar ben Ibrahim Alkhayyami de Nichabour.

Alkhayyâmî signifie *tentier,* fabricant de tentes.

Nichabour est une ville de la Perse, dans le Khorâçân.

On ne connaît pas la date précise ni de sa naissance, ni de sa mort. Il fut élevé avec deux jeunes gens devenus célèbres : Nisham Almoulk, vizir des sultans Seldjoukids Alp-Arslan et Malik-Chah, et Haçan Ibn Sabbah, fondateur de l'ordre des Assassins (*). Alkhayyâmî était

(*) Connu sous le nom de *Vieux de la Montagne* (Cheyk el djebel). *Assassin* est une corruption de hachich (chanvre), boisson dont il enivrait ses sectaires.

poëte; il paraît que ses vers étant assez libres lui ont fait une mauvaise réputation. Mais il est surtout célèbre pour la réformation du calendrier persan qu'il fit en 1079, par ordre du sultan Malik-Chah, fondateur de dynastie. On rend bissextile la 4e année 7 fois de suite, comme dans le calendrier julien; mais la 8e fois, c'est la 5e année qui a 366 jours, de sorte que c'est une intercalation de 8 jours sur 33 années; cette opération suppose une année solaire de $365^j\ 5^h\ 49'\ 5''\ 28'''$. En effet, 33 fois cet excès donnent $8^j\ 0^h\ 14'\ 24''$. La réformation grégorienne suppose une année solaire de $365^j\ 5^h\ 49'\ 12''$; l'année tropique vraie est $365^j\ 5^h\ 48'\ 46''\ 49'''$: ainsi l'année persane est la plus exacte.

L'inégalité disparaît au bout de 33 ans; il en faut 400 dans le calendrier grégorien.

Quoique Persan, Alkhayyâmî a écrit en arabe, qui passait pour langue savante, comme chez nous le latin.

M. Woepcke, sous le titre d'*Additions*, cotées A, B, C, D, E, donne encore la traduction de quelques textes arabes, les quatre premiers relatifs au problème d'Archimède, et le dernier à la trisection de l'angle.

Addition A. C'est du Chaïk ABOUL HAÇAN BEN ALHAÏTHAM (*) *sur la section d'une ligne employée par Archimède dans le livre* II.

Prenons sur une droite cinq points dans cet ordre D, H, B, T, Z, et faisons

$$DH = x, \quad DB = a, \quad DT = c - b, \quad DZ = c;$$

a, b, c sont des longueurs données : il s'agit de trouver x au moyen de l'équation

$$x^2(c - x) = a^2 b.$$

Alhaïtham construit cette équation à l'aide des deux

(*) Mort en 1034.

coniques

$$x^2 = ay, \quad y(c - x) = ab.$$

A la suite de ce Mémoire, on trouve une autre solution, précédée de ces mots : d'*une autre manière par une autre, au moyen du mouvement de la ligne;* ainsi, comme on dirait aujourd'hui, c'est une solution *cinématique*. Les Arabes désignent ces solutions sous le nom de *géométrie mobile*. (Page 120.)

On prend sur la droite un sixième point C, tel qu'on ait ZC = TZ, alors DC = $b + c$; en D et en Z on élève des perpendiculaires à la droite DC; sur la première perpendiculaire on prend DA = DB = a; par les points fixes A et C on fait mouvoir deux droites constamment *parallèles* et coupant respectivement la droite DC en des points H... et la seconde perpendiculaire en des points E...: lorsque EH sera perpendiculaire aux parallèles, le point H sera le point cherché.

M. Woepcke remarque que cette construction revient à construire : 1° la parabole qui a pour foyer A et pour sommet D; 2° la courbe, pied des perpendiculaires abaissées du point C sur les tangentes à la parabole; 3° à trouver l'intersection de cette dernière courbe avec la seconde perpendiculaire, et il fait voir l'identité de cette construction avec celle de Platon pour tracer deux moyennes proportionnelles; et, à cette occasion, le savant géomètre ajoute que la *podaire* d'un point situé sur la directrice d'une parabole est une focale à nœud de M. Quetelet; l'enveloppe de la droite mobile EH est une hyperbole.

On lit, pages 73 et 74, une liste de 117 Mémoires composés par Alhaïtham; il serait très-intéressant de les retrouver, entre autres : 1° Traité de l'analyse des problèmes géométriques; 2° Mémoire sur les étoiles qui se forment dans l'air; 3° Mémoire sur le mouvement complexe; peut-être le mouvement composé, etc.

Dans l'addition B, dont l'auteur est inconnu, on construit l'équation

$$x^3 + a = cx^2,$$

et la limite de possibilité est assignée sous la forme remarquable

$$27a = 4c^3.$$

L'addition C (page 103) est de ABOU SAHL VIDJAN BEN VASTEM ALQOUHI. Il résout ce problème omis par Archimède : *Construire un segment de sphère égal en volume à un segment de sphère donné, et égal en surface à un second segment de sphère donné.*

Soient r le rayon de la sphère à laquelle appartient le segment, Δ la flèche cherchée du segment; on a

$$\frac{\pi}{3}\Delta^2(3r - \Delta) = a, \quad 2\pi\Delta r = b'.$$

Faisant $\frac{a}{b} = a'$, $\frac{b}{\pi} = b'$,

$$\Delta^3 - \frac{3}{2}b'\Delta + 3a'b' = 0, \quad r^3 - \frac{b'}{4a'}r^2 + \frac{b'^2}{24a'} = 0.$$

Il faut exclure les valeurs négatives de r et Δ ainsi que $\Delta > 2r$. Alqouhi, non-seulement résout le problème, mais il en discute tous les cas particuliers *complétement*, avec une extrême sagacité. C'est peut-être le morceau le plus intéressant de ce recueil qui place M. Woepcke parmi les savants érudits les plus consciencieux, les plus utiles de notre époque. Puisse-t il trouver moyen de se fixer dans notre pays, où il pourra un jour prendre rang dans l'Académie des Inscriptions, genre d'importation qu'on ne saurait trop favoriser. Telle était l'opinion du grand siècle. Des négociations étaient ouvertes pour attirer en France, Érasme, Leibnitz, Huyghens, Torricelli, etc. On avait besoin d'un astronome, Louis XIV fit venir Cassini. C'est là un patriotisme éclairé, vu de haut. Devant la science, comme devant Dieu, il n'y a pas de nationalité.

Note. Dans l'excellente traduction du Mémoire de M. de Humboldt (tome X, page 372) que M. Woepcke absent n'a pu revoir, il s'est glissé de nombreuses fautes d'impression qui ont été corrigées dans le tirage à part.

La littérature orientale vient de faire encore une précieuse acquisition. La traduction depuis si longtemps attendue des Tables astronomiques d'Oloug-Beg vient de paraître; le texte est imprimé depuis 1847. M. Sédillot a complété son travail en le mettant à la portée du *grand* public, et en l'accompagnant d'un commentaire nécessaire, indispensable même pour un auteur qui présente bien des obscurités. Dans cet ouvrage ainsi que dans d'autres, bien connus des géomètres, le savant professeur combat avec succès l'opinion si longtemps accréditée, que les Arabes n'avaient aucune espèce de *spontanéité*. Dans un journal d'astronomie que nous aurons bientôt, on essayera de faire connaître ce qu'on doit à ce petit-fils de Tamerlan (xv^e^ siècle); mais nous pouvons déjà dire que, si M. Sédillot a parfaitement raison de combattre ceux qui, pour élever les Indiens et les Chinois, croient nécessaire de déprimer les Arabes, il n'est pas non plus juste d'élever les Arabes aux dépens des deux autres nations. D'ailleurs le génie n'est pas une fonction des coordonnées de l'espace et du temps; pour se manifester, il n'a besoin que de circonstances favorables.

Pourquoi M. Sédillot, savant si laborieux, si consciencieux, versé dans les sciences astronomiques et dans les deux langues orientales qui en contiennent les plus précieux documents, pourquoi un homme d'un talent si rare ne peut-il employer tous ses moments à des occupations de prédilection? Pourquoi l'astreindre à une besogne vulgaire que cent autres pourraient faire? Nous nous évertuons sans cesse à tirer le meilleur parti possible des forces naturelles, de l'eau, du vent, de la vapeur, de l'électricité, etc. Quand saurons-nous faire bon emploi des forces intellectuelles?

THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES ALGÉBRIQUES;

PAR M. C.-W. BORCHARDT (DE BERLIN).

On sait qu'on peut réduire en fraction continue la racine carrée d'un nombre entier. En est-il de même pour une fonction algébrique entière d'une seule variable? Abel, en cherchant dans quels cas l'intégrale $\int \frac{fx}{\sqrt{X}}\, dx$ (fx, X sont des fonctions entières de x) peut s'évaluer en logarithmes, a rattaché cette évaluation au développement en fraction continue de $\sqrt{X}$ (*OEuvres complètes*, tome I, page 33, et Crelle, tome I, page 184); ensuite, Jacobi ramène inversement ce développement à la multiplication de ce genre d'intégrales, mais seulement pour le cas où X est du quatrième degré, les intégrales étant alors *elliptiques* (Crelle, tome VII, page 41), et il donne ce résultat, sans démonstration. Dans un Mémoire inséré dans le journal de Crelle (tome XLVIII, cahier 1), M. Borchardt donne non-seulement cette démonstration, mais établit ce magnifique théorème :

$$\sqrt{x\varphi x} = \sqrt{x(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2\nu-1})} = r_0 + \frac{1}{2v_0} + \frac{1}{2v_1} + \ldots \frac{1}{2v_{n-1}} + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{x\varphi x}+r_n}{s_n}};$$

les r sont des fonctions entières de degré ν et les ν des fonctions, généralement parlant, du premier degré. La détermination de ces fonctions dépend de l'intégrale

$$\int_{\infty}^{0} \frac{l_0 + l_1 x + \ldots l_{r-2} x^{n-2}}{\sqrt{x \varphi x}} dx.$$

Des raisonnements rigoureux, des idées d'une clarté parfaite, une succession d'idées parfaitement coordonnées, qualités qui distinguent le célèbre analyste berlinois, rendent ce sujet difficile, d'une facile compréhension. Le Mémoire est écrit en français. En le reproduisont dans le *Journal de Mathématiques*, M. Liouville rendrait plus accessible aux géomètres français un modèle de style, de rédaction et de haute logique.

NOTE SUR UNE FORMULE DE M. GAUSS RELATIVE A LA DÉCOMPOSITION D'UN NOMBRE EN DEUX CARRÉS ET SUR QUELQUES FORMULES ANALOGUES;

PAR M. ANGELO GENOCCHI (DE TURIN).

Je démontrerai la formule de M. Gauss, qui exprime de combien de manières un nombre entier peut être décomposé en deux carrés (voir *Nouvelles Annales*, t. IX, p. 307).

Je remarque d'abord qu'il y a autant de décompositions pour un nombre n que pour son double. En effet, si l'on a

$$n = u^2 + v^2,$$

il en résulte

$$2n = (u + v)^2 + (u - v)^2;$$

et réciproquement, de

$$2n = u'^2 + v'^2,$$

où u' et v' seront tous les deux pairs ou impairs, on conclut

$$n = \left(\frac{u'+v'}{2}\right)^2 + \left(\frac{u'-v'}{2}\right)^2;$$

donc, à toute décomposition de n, il répond une décomposition de $2n$, et *vice versâ*, et l'on voit d'ailleurs, par ces formules, que les décompositions correspondantes à deux décompositions différentes de l'un des mêmes nombres seront aussi différentes entre elles.

Il suit de là qu'on peut supprimer, dans le nombre proposé, tout facteur puissance de 2, ce qui donnera pour résultat un nombre impair.

En second lieu, si t est le plus grand commun diviseur de u et v, et qu'on fasse

$$u = tu', \quad v = tv',$$

l'équation

$$n = u^2 + v^2$$

deviendra

$$n = t^2(u'^2 + v'^2),$$

de sorte que $t^2(u'^2 + v'^2)$ sera divisible par tout diviseur premier p de n. Donc, si p est de la forme $4m+3$, ne pouvant diviser la somme $u'^2 + v'^2$ de deux carrés premiers entre eux, ce nombre divisera t; et posant

$$n = p^\pi n', \quad t = p^\rho t',$$

où π et ρ sont des exposants entiers, et n', t' des entiers premiers à p, on aura

$$p^{\pi} n' = p^{2\rho} t'^2 (u'^2 + v'^2),$$

et, par conséquent,

$$\pi = 2\rho,$$

c'est-à-dire que l'exposant π doit être pair. On voit donc que, si n est décomposable en deux carrés, le produit de tous ses diviseurs premiers de la forme $4m+3$ sera un carré, facteur commun de ces deux mêmes carrés.

On aura en même temps

$$n' = t'^2 (u'^2 + v'^2),$$

et l'on en conclura que, dans cette recherche, on peut aussi faire abstraction des diviseurs premiers de la forme $4m+3$, et, en conséquence, ne considérer que les nombres dont tous les diviseurs premiers ont la forme $4m+1$.

Cela posé, si n est un nombre premier de cette forme, on sait qu'il peut toujours être décomposé en deux carrés, mais d'une seule manière. Si $n = p^{\pi}$, p étant un nombre premier de la même forme, on pourra supposer

$$n = u^2 + v^2 = (u + v\sqrt{-1})(u - v\sqrt{-1}),$$
$$p = q^2 + r^2 = (q + r\sqrt{-1})(q - r\sqrt{-1}),$$

d'où

$$(u + v\sqrt{-1})(u - v\sqrt{-1})$$
$$= (q + r\sqrt{-1})^{\pi} (q - r\sqrt{-1})^{\pi};$$

donc $u + v\sqrt{-1}$ sera l'un des diviseurs *complexes* du produit

$$(q + r\sqrt{-1})^{\pi} (q - r\sqrt{-1})^{\pi}.$$

Or, pour les nombres complexes de la forme $A + B\sqrt{-1}$, on démontre le principe, que ces nombres ne peuvent être décomposés en facteurs complexes *premiers* que d'une seule manière (*); d'ailleurs, $q + r\sqrt{-1}$ et $q - r\sqrt{-1}$ sont des nombres complexes premiers : donc $u + v\sqrt{-1}$ aura la forme

$$(\sqrt{-1})^i (q + r\sqrt{-1})^h (q - r\sqrt{-1})^k,$$

i étant 0, 1, 2, ou 3, et h, k étant nuls ou entiers positifs. On en tire

$$u - v\sqrt{-1} = (-\sqrt{-1})^i (q - r\sqrt{-1})^h (q + r\sqrt{-1})^k;$$

et, par la multiplication,

$$u^2 + v^2 = (q^2 + r^2)^{h+k},$$

c'est-à-dire

$$n = p^{h+k};$$

d'où il suit

$$h + k = \pi,$$

et

$$u + v\sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^i (q + r\sqrt{-1})^h (q - r\sqrt{-1})^{\pi - h}.$$

Cette équation fournira toutes les valeurs possibles de u et v, et, par suite, toutes les décompositions de n en deux

---

(*) Je renvoie au beau Mémoire de M. Gauss, *Theoria resid. biquadr.*, inséré dans les *Comment. Gotting. recent.*, tome VII; on peut voir aussi une démonstration de Wantzel dans les *Comptes rendus* de l'Institut, séance du 15 mars 1847. Le même principe n'est pas vrai pour les nombres complexes de tous les degrés, comme M. Kummer l'a démontré (*voyez* le Journal de M. Liouville, tome XII, page 202). Ainsi c'est, je crois, par inadvertance qu'on a dit (*Nouvelles Annales*, tome VIII, page 364) que la démonstration du dernier théorème de Fermat dépend de ce principe.

carrés, en remplaçant h successivement par $0, 1, 2, 3, \ldots, \pi$. Mais on peut la réduire à

$$u + v\sqrt{-1} = (q + r\sqrt{-1})\ (q - r\sqrt{-1})^{\pi - h},$$

car le facteur $(\sqrt{-1})^t$ ne peut qu'échanger entre elles les valeurs de u et v, ou changer leurs signes, ce qui n'augmente pas le nombre des décompositions. On aura ainsi $\pi + 1$ déterminations de u et v; mais comme

$$u - v\sqrt{-1} = (q - r\sqrt{-1})^h (q + r\sqrt{-1})^{\pi - h},$$

et que, par conséquent, la substitution de $\pi - h$ à h change seulement le signe de v, on n'emploiera que la moitié des valeurs de h, et le nombre des déterminations sera réduit à $\frac{\pi + 1}{2}$ si π est impair, à $\frac{\pi}{2} + 1$ si π est pair. Dans ce dernier cas, on aura, pour $h = \frac{1}{2}\pi$, la détermination

$$u + v\sqrt{-1} = (q + r\sqrt{-1})^h (q - r\sqrt{-1})^h = (q^2 + r^2)^h,$$

c'est-à-dire

$$u = (q^2 + r^2)^h, \quad v = 0;$$

alors $n = u^2$ et n'est pas décomposé en deux carrés : donc, en excluant cette détermination, on conclura que le nombre des décompositions de $n = p^\pi$ en deux carrés est $\frac{\pi + 1}{2}$ pour π impair, $\frac{\pi}{2}$ pour π pair.

Je suppose maintenant $n = p^\pi n'$, n' étant premier à p, et j'ai

$$\begin{aligned}&(u + v\sqrt{-1})\ (u - v\sqrt{-1})\\ &= (q + r\sqrt{-1})^\pi (q - r\sqrt{-1})^\pi n',\end{aligned}$$

qui montre que $u + v\sqrt{-1}$ doit être un diviseur complexe du produit

$$(q + r\sqrt{-1})^{\pi}(q - r\sqrt{-1})^{\pi}n';$$

donc, si $u' + v'\sqrt{-1}$ désigne un diviseur complexe de n', $u + v\sqrt{-1}$ aura la forme

$$(\sqrt{-1})^i(q + r\sqrt{-1})^h(q - r\sqrt{-1})^k(u' + v'\sqrt{-1}),$$

d'où, en changeant le signe de $\sqrt{-1}$, et multipliant les résultats, on tirera

$$u^2 + v^2 = (q^2 + r^2)^{h+k}(u'^2 + v'^2),$$

ou

$$n = p^{h+k}(u'^2 + v'^2),$$

et, par suite,

$$h + k = \pi, \quad u'^2 + v'^2 = n'.$$

On obtiendra donc toutes les valeurs de u et v par l'équation

$$u + v\sqrt{-1}$$

$$= (\sqrt{-1})^i(q + r\sqrt{-1})^h(q - r\sqrt{-1})^{\pi - h}(u' + v'\sqrt{-1}),$$

où l'on remplacera h successivement par $0, 1, 2, 3, \ldots, \pi$, et u', v' par toutes les solutions de l'équation

$$u'^2 + v'^2 = n'.$$

Mais on peut, pour les mêmes raisons que ci-dessus, omettre le facteur $(\sqrt{-1})^i$, et alors l'équation précédente fournira $(\pi + 1)N'$ déterminations de u et v, N' étant le nombre des solutions de l'équation

$$u'^2 + v'^2 = n'.$$

Ces déterminations seront égales deux à deux au signe de v près, si l'on emploie successivement tous les deux diviseurs complexes $u' + v' \sqrt{-1}$ et $u' - v' \sqrt{-1}$ de n', car on aura

$$u - v \sqrt{-1} = \left(q - r\sqrt{-1}\right)^h \left(q + r\sqrt{-1}\right)^{\pi - h} \left(u' - v'\sqrt{-1}\right);$$

si π est pair et n' un carré, on aura ainsi la détermination

$$u + v\sqrt{-1} = \left(q + r\sqrt{-1}\right)^h \left(q - r\sqrt{-1}\right)^h u' = \left(q^2 + r^2\right)^h u'$$

pour $h = \frac{1}{2}\pi$, et

$$u'^2 = n', \quad v' = 0,$$

laquelle donnant

$$u = (q^2 + r^2)^h u', \quad v = 0,$$

ne devra pas être comptée dans les décompositions de n en deux carrés. Donc le nombre de ces décompositions sera

$$\frac{(\pi + 1)\,\mathrm{N}'}{2}$$

lorsque, n n'étant pas un carré, π est impair, et sera

$$\frac{(\pi + 1)\,\mathrm{N}' - 1}{2}$$

si n est un carré et π pair : N' exprime combien il y a des nombres complexes

$$u' + v' \sqrt{-1}, \quad u' - v' \sqrt{-1},$$

qui satisfont à l'équation

$$u'^2 + v'^2 = n',$$

et se déduit du nombre des décompositions de n' en deux carrés, puisque ce nombre est $\frac{N'}{2}$ si n' est pair, et $\frac{N'-1}{2}$ si N' est impair.

De tout cela il est facile de conclure que si

$$n = a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots,$$

a, b, c, etc., étant des diviseurs premiers différents, tous de la forme $4m+1$, et α, β, γ, etc., des exposants entiers positifs, et si l'on fait

$$N = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots,$$

le nombre des décompositions de n en deux carrés sera $\frac{N}{2}$ lorsque n n'est pas un carré, et $\frac{N-1}{2}$ lorsque n est un carré. Car ce théorème est démontré dans le cas d'un seul diviseur premier, et l'on peut aussi déduire de ce qui précède que, s'il est vrai pour i diviseurs premiers, il sera vrai également pour un diviseur premier de plus.

On obtient ainsi la formule de M. Gauss.

Si l'on cherche le nombre des solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 = n,$$

on peut compter comme telle $x = \sqrt{n}$, $y = 0$, dans le cas de n carré, et alors ce nombre serait $\frac{N+1}{2}$ au lieu de $\frac{N-1}{2}$ (*).

On sait que N est le nombre des diviseurs entiers de n.

(*) Ceci montre l'inutilité de la correction indiquée tome IX, page 308.

TM.

La formule de M. Gauss est aussi une conséquence de l'équation (*)

$$(1 + 2t + 2t^4 + 2t^9 + \ldots)^2$$
$$= 1 + 4\left(\frac{t}{1-t} - \frac{t^3}{1-t^3} + \frac{t^5}{1-t^5} - \ldots\right),$$

à laquelle on est conduit dans la théorie des fonctions elliptiques ou des *factorielles réciproques*. En effet, si l'on représente par Mt^n le terme général du premier membre développé, l'exposant n sera de la forme x^2+y^2, et le coefficient M sera

$$M = 2N_1 + 4N_2,$$

où N_1 indique le nombre (o ou 2) des solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 = n,$$

l'une des inconnues x, y étant nulle, et N_2 indique le nombre des autres solutions de la même équation, pourvu qu'on compte comme deux solutions les deux déterminations

$$x = u \quad \text{et} \quad y = v, \qquad x = v \quad \text{et} \quad y = u,$$

si u et v sont différents, et comme une seule si $u = v$, mais sans avoir égard au signe de x et de y. D'autre part, un terme quelconque du second membre est

$$4(-1)^i \frac{t^{2i+1}}{1-t^{2i+1}},$$

qui se développe en termes de la forme

$$4(-1)^i . t^{2i+1} . t^{(2i+1)h} = 4(-1)^i t^{(2i+1)(h+1)},$$

de sorte que l'exposant de t sera n si l'on a

$$(2i+1)(h+1) = n,$$

(*) CAUCHY, *Comptes rendus*, 1843, 2e semestre, pages 523 et 567.

et, par suite, si $2i+1$ est un diviseur de n; on voit, de plus, que ce terme sera positif si i est pair, négatif si i est impair, et que, dans le premier cas, $2i+1$ est de la forme $4m+1$; dans le second, $2i+1$ est de la forme $4m+3$; donc, en appelant d_1 le nombre total des diviseurs de n de la première forme, d_3 celui des diviseurs de la seconde, l'agrégat de tous les coefficients de t^n dans le développement du second membre sera

$$4d_1 - 4d_3,$$

qui devra être égal à M, et, par conséquent,

$$N_1 + 2N^2 = 2(d_1 - d_3).$$

Donc, si n est réduit à n'avoir aucun diviseur premier de la forme $4m+3$, d_3 étant nul, on aura

$$N_1 + 2N_2 = 2d_1,$$

résultat qui coïncide, comme on voit facilement, avec la formule de M. Gauss.

La même théorie, que nous venons de rappeler, donne l'équation

$$(1+2t+2t^4+2t^9+\ldots)(1+2t^2+2t^{2.4}+2t^{2.9}+\ldots)$$
$$= 1+2\left(\frac{t}{1-t}+\frac{t^3}{1-t^3}-\frac{t^5}{1-t^5}-\frac{t^7}{1-t^7}+\ldots\right),$$

de laquelle on tire d'une manière semblable le nombre des solutions de l'équation

$$x^2+2y^2=n.$$

Si N_1 est le nombre des solutions de cette équation lorsque l'une des inconnues est nulle, et N_2 celui des autres solutions; si, d'autre part, on exprime respectivement par

d_1, d_3, d_5, d_7 combien le nombre n a de diviseurs des formes

$$8m+1,\quad 8m+3,\quad 8m+5,\quad 8m+7,$$

on trouvera

$$N_1+2N_2=d_1+d_3-d_5-d_7.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}&(1+2t+2t^4+2t^9+\ldots)(1+2t^3+2t^{3.4}+2t^{3.9}+\ldots)\\&=1+2\left(\frac{1-t}{1-t^3}t+\frac{1+t^2}{1+t^6}t^2+\frac{1-t^3}{1-t^9}t^3+\ldots\right),\end{aligned}$$

et en appelant N_1 le nombre des solutions de l'équation

$$x^2+3y^2=n,$$

qui correspondent à l'une des inconnues nulle, N_2 celui des autres solutions, on trouvera

$$N_1+2N_2=(-1)^n\,(d_1-d_2-d_3-d_4):$$

ici, d_1 est le nombre de ces diviseurs i de n, dont les réciproques $\frac{n}{i}$ sont de la forme $3m+1$, et diffèrent d'eux d'un nombre impair; d_2 est le nombre des diviseurs dont les réciproques sont aussi de la forme $3m+1$, mais diffèrent d'eux d'un nombre pair; d_3 est le nombre des diviseurs dont les réciproques sont de la forme $3m+2$, et diffèrent d'eux d'un nombre impair; et enfin, d_4 est le nombre des autres diviseurs, dont les réciproques sont de la forme $3m+2$ (*).

(*) La formule qu'a donnée M. Cauchy (*Comptes rendus*, tome XIX, page 1383) revient à celle-ci; mais il faut y mettre $\frac{1}{2}N$ à la place de N, et entendre par N le nombre de toutes les solutions entières positives, entières négatives et nulles de l'équation

$$x^2+3y^2=n.$$

Ces deux formules peuvent aussi être démontrées par la première méthode que j'ai exposée pour celle de M. Gauss.

Je rappellerai enfin les deux équations :

$$(t + t^3 + t^{25} + t^{49} + \ldots)^4$$
$$= \frac{t^4}{1-t^8} + \frac{3t^{12}}{1-t^{24}} + \frac{5t^{20}}{1-t^{40}} + \frac{7t^{28}}{1-t^{56}} + \ldots,$$

$$(1 + 2t + 2t^4 + 2t^9 + \ldots)^4$$
$$= 1 + 8\left(\frac{t}{1-t} + \frac{2t^2}{1+t^2} + \frac{3t^3}{1-t^3} + \ldots\right).$$

De la première on déduira que, si n est un nombre impair, et si l'on désigne par D la somme de ses diviseurs, et par N le nombre des solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 4n$$

en nombres impairs, on a

$$\mathrm{N} = \mathrm{D}.$$

Quant à la deuxième, soient n un entier quelconque, D_1 la somme de ses diviseurs impairs, D_2 la somme de ses diviseurs pairs dont les réciproques sont impairs, et D_4 la somme de ses diviseurs pairs dont les réciproques sont aussi pairs; de plus, que le nombre des solutions de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = n$$

soit N_1 si trois des inconnues sont nulles, N_2 si deux sont nulles, N_3 si une seule inconnue est nulle, N_4 si aucune n'est nulle : on aura

$$\mathrm{N}_1 + 2\mathrm{N}_2 + 4\mathrm{N}_3 + 8\mathrm{N}_4 = 4(\mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2 - \mathrm{D}_4).$$

On doit remarquer que les deux déterminations

$$x = a, \quad y = b, \quad z = c, \quad u = d.$$

et

$$x=b, \quad y=a, \quad z=c, \quad u=d$$

sont comptées pour deux solutions si a et b sont différents, et ainsi des autres.

SUR LA DIVISION ABRÉGÉE ET LA DIVISION ORDONNÉE (*);

PAR M. TURQUAN,

Agrégé des Sciences mathématiques.

1°. PRINCIPE FONDAMENTAL. — *Si l'on a à effectuer une division dont le quotient n'ait qu'un seul chiffre, qu'on supprime le même nombre de chiffres à la droite du dividende et du diviseur, et qu'on divise l'un par l'autre le dividende et le diviseur ainsi restreints ; si le reste de cette division est plus grand que le chiffre du quotient, ce quotient sera celui de la division proposée.*

Par exemple, soit à diviser 464 936 758 par 84 783 639. Supprimons cinq chiffres à droite du dividende et du diviseur, et divisons 4649 par 847, ce qui nous donnera pour quotient 5 et pour reste 414. Je dis que 5 est le quotient de la division proposée.

En effet, ce chiffre 5 indique combien de fois 847 est contenu dans 4649, et, par suite, combien de fois 84 700 000 est contenu dans 464 900 000, ou bien encore combien de fois 84 700 000 est contenu dans 464 936 758; donc 5 peut être trop fort, mais pas trop faible. Il ne peut pas non plus être trop fort, car, si cela était, on aurait

$$464\,936\,758 < 5 \times 84\,783\,639,$$

(*) *Voir* tome III, pages 308, 658; tome V, pages 244, 250, 460, 599, 629; tome VI, page 425; tome XI, pages 53, 100, 148.

et, à fortiori,

$$464\,900\,000 < 5 \times 84\,800\,000,$$

ou

$$4\,649 < 5 \times 848.$$

Mais on a

$$4\,649 > 5 \times 847;$$

donc 4 649 est compris entre 5.847 et 5.848; la différence entre 4 649 et 5.847 serait donc moindre que 5, ce qui n'a pas lieu.

Le principe énoncé se trouve donc démontré : voyons comment nous pourrons nous en servir pour abréger la division.

2°. Soit à diviser 4 649 367 587 par 847 836. Le quotient aura quatre chiffres. Je prends sur la gauche du diviseur cinq chiffres, autant plus un qu'il y en a au quotient, savoir 84 783, et sur la gauche du dividende assez de chiffres pour contenir le diviseur conservé 84 783, et le contenir moins de dix fois, savoir 464 936; et je divise ensuite ces six premiers chiffres du dividende par les cinq premiers chiffres du diviseur. Je trouve pour quotient 5.

$$\begin{array}{r|l} 4\,649\,36\overline{7\,587} & 847\,83\bar{6} \\ \cline{2-2} 41\,0\,18 & 5483 \\ 71\,05 & \\ 3\,23 & \\ 69 & \end{array}$$

Je multiplie 84 783 par 5, en ayant soin d'augmenter le produit des dizaines qui proviennent de la multiplication du chiffre barré 6 du diviseur par 5. Je soustrais le produit du dividende 464 936, et je trouve pour reste 41 018. Ce reste est évidemment plus petit que celui de la division de 464 936 par 84 783, puisqu'on a mis 18 pour le produit de 3.5, et comme il est aussi plus grand que 5, ce chiffre 5, en vertu de notre principe fondamental, est le quotient des sept premiers chiffres du dividende par le diviseur, et, par conséquent, le premier chiffre de la division proposée.

Ce reste 41 018 se compose des cinq premiers chiffres du second dividende partiel que donnerait la division ordinaire, sauf une erreur en plus qui vient de ce qu'on n'a pas soustrait les unités provenant du produit du premier chiffre barré 6 par le chiffre 5, erreur qui ne peut pas surpasser deux unités (*). Par conséquent, si l'on divise 41 018 par les quatre premiers chiffres du diviseur, et si le quotient trouvé est plus petit que le reste correspondant diminué de 2, ce quotient sera le second chiffre du quotient de la division proposée. Je barre donc le chiffre 3, je divise 41 018 par 8 478, ce qui me donne pour quotient 4; je multiplie 8 478 par 4, j'ajoute au produit les dizaines provenant de la multiplication du dernier chiffre barré 3 par 4, je soustrais de 41 018; le reste 7 105 est plus petit que le reste de la division de 41 018 par 8478, et, diminué de 2, il est encore plus grand que 4. Donc 4 est le second chiffre cherché.

Le reste 7105 se compose des quatre premiers chiffres du troisième dividende partiel que donnerait la division ordinaire, sauf une erreur en plus de quatre unités, parce que le reste précédent 41 018 peut être lui-même trop fort de deux unités, et parce que le défaut de soustraction des unités de mille provenant de la multiplication des parties négligées du diviseur par 400 peut encore amener deux unités d'erreur. Par conséquent, si l'on divise 7 105 par les trois premiers chiffres du diviseur, et si le quotient trouvé est plus petit que le reste correspondant diminué de quatre unités, ce quotient sera le troisième chiffre du quotient de la division proposée. Je barre donc le chiffre 8, je divise 7 105 par 847, ce qui me donne pour quotient 8; je multiplie 847 par 7, j'ajoute au produit les dizaines provenant de la multiplication du dernier

(*) *Voir* la remarque, page 174.

chiffre barré 8 par le quotient 8, je soustrais de 7105. Le reste 323 est plus petit que le reste de la division de 7105 par 847, et, diminué de 4, il est encore plus grand que 8. Donc 8 est le troisième chiffre cherché.

On voit facilement que le reste 323 se compose des trois premiers chiffres du quatrième dividende partiel que donnerait la division ordinaire, sauf une erreur en plus qui ne peut pas surpasser six unités. Par conséquent, si l'on barre le chiffre 7 et si l'on divise 323 par 84, le chiffre ainsi trouvé 3 sera le quatrième chiffre demandé, parce que le reste 69, évalué avec les précautions prises dans les opérations précédentes, est plus petit que le reste de la division de 323 par 84, et que, diminué de 6, il est encore plus grand que 3.

3°. On voit, par ce qui vient d'être dit, que :

Pour trouver le quotient d'un nombre entier par un nombre entier à une unité près, on conserve au diviseur, à partir de la gauche, autant de chiffres plus un qu'on en veut avoir au quotient; on prend sur la gauche du dividende un nombre suffisant de chiffres pour contenir la partie conservée du diviseur et pour la contenir moins de dix fois; on divise ensuite le dividende restreint par le diviseur restreint, ce qui donne le premier chiffre du quotient; on multiplie le diviseur restreint par ce chiffre, en ayant soin d'augmenter le produit des dizaines provenant de la multiplication du premier chiffre négligé du diviseur par le premier chiffre du quotient, et l'on soustrait du premier dividende partiel. On barre le dernier chiffre du diviseur, et l'on divise le reste par ce nouveau diviseur, on a ainsi le second chiffre du quotient; on multiplie le second diviseur par ce chiffre, en ayant soin d'ajouter au produit les dizaines du produit du dernier chiffre barré par le second chiffre du quotient, et l'on soustrait du premier reste. On supprime un nouveau chiffre à la droite du diviseur, et l'on a ainsi un troisième diviseur restreint par lequel on divise le second reste, et l'on obtient le troisième chiffre du quotient, et ainsi de suite.

Tant que chaque reste, diminué d'autant de fois 2 qu'on a trouvé de chiffres moins un au quotient, est plus grand que le dernier chiffre trouvé, ce chiffre est exact, et l'on a le quotient approché par défaut, à moins d'une unité de l'ordre de ce chiffre.

Comme on a pris au diviseur autant de chiffres plus un qu'il y en a au quotient, le diviseur qui donnera le chiffre des unités aura deux chiffres, et le reste correspondant en aura ordinairement deux, et sera dans la plupart des cas, même après la correction, plus grand que le dernier chiffre du quotient.

4°. *Remarque.* Il est facile de se convaincre que le défaut de soustraction des chiffres négligés de chaque produit, peut augmenter de deux unités les parties conservées des restes; car, en ajoutant au produit du dernier chiffre barré par le dernier chiffre trouvé au quotient, les dizaines provenant de la multiplication de l'avant-dernier chiffre barré, on pourrait augmenter les dizaines de ce produit d'une unité, et si les unités se trouvaient plus grandes que le chiffre correspondant du dividende partiel, et qui n'est pas écrit, ces dizaines augmenteraient d'une nouvelle unité. De sorte que ces deux unités se retrouveraient dans le reste suivant, qui serait ainsi augmenté de deux unités. L'erreur peut donc aller jusqu'à deux unités, mais il est évident qu'elle ne peut pas aller au delà.

5°. On peut facilement trouver le véritable reste de la division. Il suffit, en effet, d'écrire à côté de 69 (page 171) les chiffres négligés du dividende, et de retrancher du nombre ainsi obtenu tout ce qu'on a omis de soustraire par le procédé de la division abrégée; ce qui se compose évidemment du produit

de	6	par	5 000	moins les dizaines de mille provenant de ces différents produits.
de	36	par	400	
de	836	par	80	
de	7 836	par	3	

Désignons-les par d, d', d'', d'''; on aura

$$
\begin{array}{rcr}
6 \times 5\,000 - d & = & 0000 \\
36 \times 400 - d' & = & 4\,400 \\
836 \times 80 - d'' & = & 6\,880 \\
7836 \times 3 - d''' & = & 3\,508 \\
\hline
\text{Total} \ldots\ldots\ldots\ldots & & 14\,788
\end{array}
$$

on retranchera donc 14 788 de 697 587, et le résultat 682 799 sera le reste de la division.

On pourra se servir de ce reste pour trouver quatre autres chiffres du quotient par la méthode de la division abrégée.

```
4649367587 | 847836
  41018    | 5483,80534325
   7105    |
    323    |
    697587
     14788
    ------
    682799
      4531
       292
      320000
       13308
      ------
      366692
       27638
        2204
         509
           1
```

On supprimera le dernier chiffre 6 du diviseur, et l'on divisera 682 799 par 84 783, ce qui donne pour quotient 8. On multipliera 84 783 par 8, en ayant soin d'ajouter au produit les dizaines provenant de la multiplication du chiffre négligé 6 par 8. Le reste 4 531 est plus grand que 8, donc le chiffre 8 convient. On barrera le chiffre 3 et l'on divisera 4531 par 8 478. Le quotient est zéro. On barrera alors le chiffre 8 du diviseur, et l'on divisera le même reste 4531 par 847. On trouve pour quotient 5. On multipliera 847 par 5 en ayant soin d'ajouter au produit les dizaines provenant de la multiplication du dernier chiffre barré 8 par 5, et l'on soustrait de 4531. Le reste 292, diminué de quatre unités, est plus grand que 5, donc le chiffre 5 convient. On supprime enfin le chiffre 7 du diviseur, et l'on divise 292 par 84. On trouve pour quotient 3. On multiplie 84 par 3 en ayant soin d'augmenter ce produit des dizaines provenant de la multiplication du dernier chiffre barré 7 par 3, et l'on soustrait de 292. Le reste 38, diminué de 6, étant plus grand que le chiffre 3, ce chiffre 3 convient.

On pourra ensuite retrouver le véritable reste correspondant au dernier chiffre 3 du quotient par le même procédé que nous avons suivi tout à l'heure, et ce nouveau reste permettra de trouver encore quatre autres chiffres au moyen de la division abrégée.

6°. Lorsqu'un des restes, diminué d'autant de fois 2 qu'on a déjà trouvé de chiffres moins un au quotient, est plus petit que le dernier chiffre trouvé, ce dernier chiffre est incertain, et il faut s'assurer s'il convient avant de continuer l'opération. Pour cela, on rétablira le reste suivant tel qu'il aurait été obtenu par le procédé de la division ordinaire, de la même manière que nous avons déjà rétabli le reste final de la division; et si la correction peut se faire, le chiffre convient, car le produit du diviseur par ce chiffre est plus petit que le dividende partiel qui l'a donné. Si la correction ne peut pas se faire, il faudra diminuer ce chiffre d'une unité, et recommencer la vérification.

Au lieu de rétablir le reste suivant tout entier, on pourra en rétablir une partie seulement, comme on le voit dans l'exemple suivant. Le reste correspondant au chiffre 8 trouvé au quotient est 6, plus petit que 8; ce dernier chiffre pourrait donc être trop fort. Pour s'en assurer, à côté du dernier reste 6 on abaissera le premier chiffre négligé du dividende; le nombre 65 ainsi obtenu contient les mille du troisième dividende partiel augmenté de tous les mille que le procédé de la division abrégée n'a pas permis de soustraire. Or ces mille sont la somme des unités du produit de 7 par 3000, des dizaines du produit de 7 par 800 et des unités du produit de 6 par 800, somme égale à 14. Comme 14 peut être retranché de 65, et que le reste 51 est plus grand que 2, le produit du diviseur par 8 est nécessairement plus petit que le second dividende partiel, et le chiffre 8 convient.

2 452 $\overline{445\ 375}$	645 36$\overline{7}$
516 34	380 0
65	
14	
51	

DIVISION ORDONNÉE.

7°. Il est clair qu'au lieu de chercher par le procédé abrégé de la division le nombre total des chiffres de la partie entière du quotient, on peut n'en chercher qu'un certain nombre, trois par exemple. Alors il faut commencer par diviser les cinq ou quatre premiers chiffres du dividende par les quatre premiers du diviseur. Après avoir trouvé le troisième chiffre, on rétablira les premiers chiffres du reste correspondant par un procédé semblable à celui qui nous a servi dans le paragraphe précédent, et, avec ce reste, on pourra encore trouver trois autres chiffres, etc.

On peut même ne chercher qu'un seul chiffre à la fois en divisant les trois premiers chiffres du dividende par les deux premiers du diviseur, et en rétablissant après chaque division les trois premiers chiffres du reste correspondant. Cette méthode simplifie aussi l'opération, et elle est sur tout remarquable parce qu'elle reproduit, sauf de légères modifications, la division ordonnée de Fourier.

Reprenons la même division que plus haut. Prenons pour diviseur désigné 84, et pour premier dividende partiel 464. Nous trouverons pour quotient 5 et pour reste 41 plus grand que 5; donc 5 convient. Nous écrivons à côté du reste le chiffre 9; le nombre 419 surpasse les unités du septième ordre du second dividende partiel ordinaire de toutes les unités du septième ordre provenant de la multiplication des 7 mille du diviseur par les 5 mille du quotient et de celles provenant du produit des 8 centaines du diviseur par 5000. Ce nombre d'unités du septième ordre s'élève à 9. Je soustrais 9 de 419, et le reste 410, sauf une erreur en plus qui ne peut surpasser deux unités, se compose des millions du second dividende partiel. Je divise 410 par 84, je trouve pour quotient 4 et pour reste 72; 72, diminué de 2, est plus grand que 4, donc 4 convient. A côté de 72, j'écris 3; 723 surpasse les unités du sixième ordre provenant de la multiplication des 3 dizaines et des 8 centaines du diviseur par 5000, et de la multiplication des 8 centaines et des 7000 du diviseur par 400, donc la somme s'élève à 12. Je soustrais 12 de 723, et le reste

```
4649 367 587 | 847 836
     . . . . . . |----------
 419            | 5483,8053
   9
 ---
 410
  723
   12
  ---
  711
   346
    23
   ---
   323
    697
     13
    ---
    684
      75
      28
     ---
     478
      24
     ---
     454
      317
       25
      ---
      292
       380
        12
       ----
       ....
```

711, sauf une erreur en plus qui ne peut surpasser deux unités, contient toutes les centaines de mille du troisième dividende partiel ordinaire. Je divise 711 par 84, je trouve pour quotient 8 et pour reste 34; 34, diminué de 2, est plus grand que 8, donc le chiffre 8 convient. A côté de 34, j'abaisse le chiffre 6, et le nombre 346 surpassera les dizaines de mille du quatrième dividende partiel ordinaire de toutes celles qui proviennent de la multiplication des 6 unités et des 3 dizaines du diviseur par 5000, de la multiplication des 3 dizaines et des 8 centaines du diviseur par 400, de la multiplication des 8 centaines et des 7 mille du diviseur par 80. Cette somme donne en tout 23 dizaines de mille. Je soustrais 23 de 346; le reste 323, sauf une erreur en plus qui ne peut surpasser 2, est le nombre des dizaines de mille contenues dans le quatrième dividende partiel ordinaire.

Ce nombre 323 donnera le quatrième chiffre du quotient, savoir 3 : on trouvera de la même manière le chiffre des dizaines 8. Mais ici se présente une circonstance remarquable. Le reste 7 est plus petit que 8, ce chiffre 8 peut donc être trop fort. Pour le vérifier, j'abaisse le chiffre 5 à côté de 7, et je fais la correction. La correction peut se faire, et le reste corrigé surpasse 2. Donc le produit du diviseur par 8 ne surpasse pas le cinquième dividende partiel ordinaire, donc le chiffre 8 convient. Le dividende partiel corrigé 47 est plus petit que 84, j'écris o au rang des dizaines, et le chiffre suivant 8 à côté de 7; je fais la correction, et je trouve ainsi au quotient le chiffre 5, puis le chiffre 3, etc.

8°. On peut donc formuler, ainsi qu'il suit, ce procédé de division ordinaire :

On prend pour diviseur désigné les deux ou trois premiers chiffres à gauche du diviseur, et sur la gauche du dividende une partie qui contienne ce diviseur désigné, et ne le contienne pas dix fois. On divise ce premier dividende partiel par le diviseur désigné, et l'on en soustrait le produit du diviseur désigné par le chiffre trouvé au quotient, en ayant soin de l'augmenter des dizaines provenant de la multiplication du premier chiffre négligé par ce chiffre du quotient. Si le reste ainsi obtenu est plus petit que le chiffre trouvé au quotient, ce chiffre est bon.

A côté du reste, on abaisse le premier chiffre négligé du dividende, on a un nouveau dividende partiel qu'il faut corriger en en soustrayant les unités de même ordre que son dernier chiffre, provenant du produit des deux premiers chiffres négligés du diviseur par le chiffre trouvé au quotient. On a ainsi un nouveau dividende partiel que l'on divise par le même diviseur désigné, ce qui donne le second chiffre du quotient; on retranche de ce second dividende partiel le produit du diviseur désigné par le nouveau chiffre du quotient, en ayant soin de l'augmenter des unités de même ordre provenant de la multiplication des chiffres négligés du diviseur par la partie trouvée du quotient, et si le reste diminué de deux unités est plus grand que ce chiffre du quotient, ce chiffre est bon.

A côté du reste, on abaisse le second chiffre négligé du dividende, on retranche du résultat ainsi obtenu les unités de même ordre que son dernier chiffre qui proviennent de la multiplication des trois premiers chiffres négligés du diviseur par les deux premiers chiffres du quotient; on a ainsi un troisième dividende partiel qu'on divise par le diviseur désigné, et ainsi de suite.

Lorsqu'il arrive qu'un reste diminué de 2 est plus petit que le chiffre dernièrement trouvé au quotient, ce chiffre peut être trop fort. On abaisse alors à côté de ce reste un nouveau chiffre du dividende, et l'on fait la correction. Si cette correction peut se faire, et que le reste soit plus grand que 2, le chiffre est bon, sinon le chiffre est trop fort, il faut le diminuer d'une unité et recommencer la vérification.

9°. Voici maintenant comment on peut faire la correction dont il est parlé. On multiplie le second chiffre négligé du diviseur par le nouveau chiffre obtenu au quotient, et l'on retient les dizaines; on multiplie le premier chiffre négligé par le même multiplicateur, on ajoute les unités de ce produit aux dizaines du précédent, et l'on écrit la somme. On multiplie le troisième chiffre négligé par le chiffre précédent du quotient, on retient les dizaines, puis le second chiffre négligé par le même multiplicateur, et l'on ajoute les unités de ce produit aux dizaines retenues, et l'on écrit cette somme au-dessous de la première, et ainsi de suite; on ajoute entre eux tous les résultats qu'on vient d'écrire, et la somme donne la correction qu'il y a à faire.

SUR LE PROBLÈME DU CAVALIER AU JEU DES ÉCHECS;

PAR UN ABONNÉ.

On connaît le problème auquel a donné naissance la convention faite relativement à la marche du cavalier au jeu des échecs. Il s'agit, dans ce problème, de faire occuper successivement et une seule fois, par le cavalier, chacune des soixante-quatre cases de l'échiquier, de manière à pouvoir revenir, si l'on veut, de la dernière case à celle qui a servi de point de départ. Ce problème, dont plusieurs géomètres se sont occupés, n'a aucune difficulté; mais la détermination du nombre de solutions distinctes qu'il peut admettre, constitue un nouveau problème d'un ordre plus élevé et que nous étudierons dans un autre article. Nous nous bornerons ici à indiquer la manière dont on peut obtenir les diverses solutions du problème du cavalier. Legendre a traité cette question dans le second volume de sa *Théorie des nombres* (3^e édition); mais ce qu'il a dit à ce sujet n'est pas suffisant.

Plaçons le cavalier à une case quelconque où nous écrivons le nombre 1, puis faisons-le marcher conformément à la règle du jeu, arbitrairement d'ailleurs, en ayant soin d'écrire les nombres 2, 3, 4, etc., dans les cases qui sont ainsi successivement occupées, et de ne point revenir à une case déjà marquée. Il pourra arriver, par hasard, qu'en opérant de la sorte, on passe par chacune des 64 cases, lesquelles seront ainsi désignées par les nombres 1, 2,..., 64; mais, le plus souvent, on sera arrêté avant d'avoir épuisé toutes les cases, la dernière de celles où l'on est entré ne correspondant qu'avec des cases déjà marquées. Nous disons que deux cases se correspondent lorsqu'on peut aller directement de l'une à l'autre, d'après la règle du jeu. Dans tous les cas, si les cases marquées de numéros impairs sont blanches, les cases marquées de numéros pairs seront noires, ou réciproquement.

Supposons que n cases aient été marquées par les nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n,$$

et écrivons des lettres quelconques A, B, C,... dans les cases non marquées. Nous allons montrer comment on peut successivement faire entrer, dans le circuit des n premières cases, chacune des cases restantes.

Remarquons d'abord que le circuit 1.2... n peut être changé d'un très-grand nombre de manières diverses.

Soit, par exemple, n_0 l'une des cases qui correspondent à n, notre circuit pourra être remplacé par le suivant :

$$1.2\ldots n_0 \mid n(n-1)\ldots(n_0+1).$$

Soit, de même, n_1 l'une des cases qui correspondent à 1, le circuit 1.2... n pourra être remplacé par

$$(n_1-1)\ldots 2.1 \mid n_1(n_1+1)\ldots n.$$

On voit qu'on peut toujours changer en une autre, l'une quelconque des deux cases extrêmes du circuit primitif, et cela de plusieurs manières; car, après avoir fait ce changement une fois, on peut encore faire un nouveau changement, et ainsi de suite.

Pour l'objet que nous avons en vue, il faut diriger l'opération du changement de circuit de manière que l'une des cases extrêmes du nouveau circuit corresponde avec l'une des cases que l'on veut introduire, et alors cette introduction se fera immédiatement; par exemple, si l'on a remplacé le circuit 1.2... n par

$$1\ldots n_0 \mid n\ldots(n_0+1),$$

et que n_0+1 corresponde avec A, on aura le circuit

$$1\ldots n_0 \mid n\ldots(n_0+1) \mid A,$$

qui comprend la case A. Par cette méthode, on pourra toujours, après quelques tâtonnements, introduire successivement et une à une toutes les cases marquées des lettres A, B, C,.... On pourrait croire qu'il faille changer le numérotage après chaque introduction; mais cela n'est pas nécessaire, et avec un peu d'attention on pourra opérer comme si ce changement avait été effectué.

La méthode précédente est générale, mais il se présente des cas où l'on peut l'éviter et opérer plus simplement. Par exemple, si les deux cases A et B se correspondent et qu'elles correspondent respectivement avec les cases n_0 et $n_0 + 1$ du circuit, les cases A et B s'introduisent immédiatement; on a, en effet, le circuit

$$1 \ldots n_0 \mid A, B \mid (n_0 + 1) \ldots n;$$

on pourra de la même manière faire entrer en même temps dans le circuit plusieurs cases A, B, C,..., L qui formeraient entre elles un circuit dont les extrêmes correspondraient à deux cases successives n_0 et $n_0 + 1$.

En opérant comme il vient d'être expliqué, on obtiendra un circuit complet, renfermant les 64 cases; mais, en général, ce circuit ne sera pas *rentrant*, c'est-à-dire que la dernière case ne correspondra pas avec la première. Or il est très-aisé de faire *rentrer* un circuit non rentrant. Supposons que les 64 cases, dans l'ordre où elles sont occupées, soient marquées des nombres

$$1, 2, 3, \ldots, 64.$$

La question que nous nous proposons se résout immédiatement, dans le cas où il existe deux cases successives m et $m + 1$ qui correspondent, la première avec 64, la seconde avec 1. On a, en effet, ce nouveau circuit qui est rentrant, savoir :

$$1.2.3 \ldots m \mid 64.63 \ldots (m + 1).$$

Le cas où il n'existe pas deux cases m et $m + 1$ qui correspondent avec 64 et 1 respectivement, se ramène toujours au premier cas en changeant le circuit d'une manière convenable, comme il a été indiqué plus haut.

Ce n'est que quand le circuit est rentrant que le problème du cavalier est complétement résolu; on peut alors partir d'une case quelconque. Supposons, par exemple, qu'on ait un circuit rentrant dont les cases successives soient marquées

$$1.2.3 \ldots 64;$$

si l'on veut partir de la case 26, il faudra marcher dans l'ordre suivant :

$$26 \ldots 64 \mid 1 \ldots 25.$$

Exemple. En opérant comme il a été indiqué plus haut, je remplis 60 cases que je marque 1.2... 60, je désigne les 4 cases restantes par A, B, C, D, j'ai le tableau suivant :

1	24	51	36	11	22	49	34
52	37	12	23	50	35	10	21
13	2	25	56	C	B	33	48
26	53	38	41	60	57	20	9
3	14	55	58	A	40	47	32
54	27	42	39	D	59	8	19
15	4	29	44	17	6	31	46
28	43	16	5	30	45	18	7

Les cases A et B se correspondent, de plus A correspond avec 20 et B avec 21 ; on peut donc immédiatement introduire A et B, et l'on a le circuit

$$1 \ldots 20 \mid A.B \mid 21 \ldots 60.$$

En deuxième lieu, C correspond avec 36, et 60 correspond avec 35 ; cela permet d'introduire C, et l'on a le nouveau circuit

$$1 \ldots 20 \mid A.B \mid 21 \ldots 35 \mid 60 \ldots 36 \mid C.$$

En troisième lieu, D correspond avec 57, et C correspond avec 58 ; cela permet d'introduire D, et l'on a le nouveau circuit qui embrasse toutes les cases, savoir :

1... 20 | A.B | 21...35 | 60...58 | C | 36...57 | D.

Pour rendre ce circuit rentrant, changeons-le d'abord dans le suivant, en se servant de ce que D correspond avec 55,

1... 20 | A.B | 21...35 | 60... 58 | C | 36...55 | D | 57.56;

remarquant ensuite que 1 et 56 correspondent respectivement avec 12 et 11, on obtient le circuit suivant, qui est rentrant :

1...11 | 56.57 | D | 55... 36 | C | 58...60 | 35... 21 | B.A | 20...12.

Et, si l'on numérote ces mêmes cases de 1 à 64, dans l'ordre qu'on doit suivre, le premier tableau se change dans le suivant :

1	50	19	34	11	52	21	40
18	33	64	51	20	39	10	53
63	2	49	12	35	54	41	22
48	17	32	29	38	13	56	9
3	62	15	36	55	30	23	42
16	47	28	31	14	37	8	57
61	4	45	26	59	6	43	24
46	27	60	5	44	25	58	7

La considération des échiquiers d'un nombre quelconque mn de cases conduit à des remarques curieuses que nous pourrons développer plus tard.

Note du Rédacteur. C'est Euler qui, le premier, a ramené ce problème de situation à un *tâtonnement rationnel* (Académie de Berlin, 1759); à l'aide d'une notation ingénieuse, Vandermonde a appliqué ce procédé à un échiquier quelconque de *mn* cases; même à un échiquier *solide* (Académie de Paris, 1771), et récemment, un géomètre s'en est occupé dans un journal anglais (Rev. Moon, *On the knights move at chess, Cambridge and Dublin mathematiques Journal*, 1^e série, vol. III, p. 333, 1^{re} édit.). Un ouvrage très-curieux et très-ingénieux est celui du chevalier Ciccolini, *del cavallo degli scacchi*, Paris, 1826: on y résout le problème même pour des échiquiers *circulaires*. La solution rigoureuse, et par conséquent celle qui concerne le nombre des solutions, est encore à trouver. C'est que les principes de la géométrie de situation désirés par Leibnitz sont toujours inconnus; principes intimement liés à la théorie combinatoire des nombres et au calcul aux différences partielles finies. C'est ainsi que les questions 151, 152 (*Nouvelles Annales*, t. XI, p. 114) sur les échecs et le domino, qui résistent aux efforts d'excellents géomètres, sont des questions combinatoires, les combinaisons étant soumises à certaines lois. Le problème sur le nombre de chemins différents qui peuvent amener une tour d'une case donnée à une autre case donnée, a été résolu rigoureusement, je crois, par Charles (*) à l'aide de l'intégration d'une équation aux différences finies. Je ne sache pas qu'on se soit occupé du même problème pour le fou.

L'ouvrage imprimé le plus ancien sur le jeu des échecs est, je crois, celui de Damiano, qui a paru à Rome, en

(*) Dans la Biographie Michaud, on a fait de ce Charles le géomètre et de Charles le physicien un seul et même homme; ou trouve-t-on des renseignements sur le géomètre?

italien et en espagnol, en 1512 (*Libro imparare giuocase*). On lui attribue le coup du gambit (*gambetta*, croc-en-jambe) qui consiste à sacrifier au troisième coup le cavalier du roi pour amener une belle attaque. On croit que l'auteur le plus ancien sur le jeu des échecs est Jacobus de Césolis, né à Césole, en Picardie, au XIII^e siècle.

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez MALLET-BACHELIER, libraire, quai des Augustins, 55.

HEIDELEFF.

Die banhutte des mittel alters, etc. La loge maçonnique du moyen âge en Allemagne; exposition historique succincte, avec des documents et autres appendices; suivie d'une dissertation sur les arcs aigus (en ogive), dans l'architecture des anciens, comme ayant servi de précurseur aux principes de l'ancienne architecture allemande, et se rattachant à l'ouvrage de l'auteur ayant pour titre : *Ornamentique du moyen âge*, par CARL HEIDELEFF, architecte, et professeur royal de Bavière et conservateur. *Nuremberg*, 1854. In-4° de 130 pages, figures dans le texte.

Cet ouvrage contient des renseignements très-curieux, fort instructifs sur l'organisation des confréries des ouvriers en maçonnerie, au moyen âge. Après la chute de l'empire romain, ce sont les moines et principalement les bénédictins qui ont fondé ces confréries, composées d'architectes, de tailleurs de pierre, de maçons et de charpentiers; ils étaient divisés en novices, compagnons, maîtres, et soumis à des règlements hiérarchiques; les frères se reconnaissaient entre eux à certains signes, à certaines manières de se serrer les mains, etc.; les assemblées se tenaient dans des édifices affectés à cet usage et bâtis tout près des couvents : ces lieux de réunion se nomment *Loges* (huttes). On y discutait les intérêts des confréries et l'on y rédigeait les règlements, statuts, etc., obligatoires pour tous les membres. Il y avait quatre loges principales pour toute l'Allemagne, savoir : Strasbourg, Cologne, Zurich, Vienne. Tout obéissait à ces loges, dont la plus considérée était celle de Strasbourg; c'est à Albertus Argentinus, fondateur du *Munster* (cathédrale) de Strasbourg, qu'on attribue d'avoir fondé toutes les proportions de l'architecture ogivale sur les propriétés de l'octogone régulier (achtort); il y en a qui croient que cet Albert est le même qu'Albert le Grand, et non sans fondement. Les frères voyageaient et étaient appelés où il y avait des couvents ou des églises à construire. Cela explique comment de si vastes, de si nombreuses constructions ont pu s'effectuer au moyen âge. Les chefs étaient des prêtres, les travailleurs des confrères qui agissaient dans l'intérêt de la foi, et le peuple payait, en faisant son salut. C'est le même esprit religieux, la même organisation qui a produit les gigantesques édifices des Égyptiens; l'enseignement pratique et technique était mystérieux, et il n'était pas permis de divulguer les préceptes.

Dans cet ouvrage, on lit plusieurs règlements maçonniques de 1404, 1459 (Strasbourg), 1498 (privilége impérial), 1563, et (pages 34-94) en tout, treize documents.

A la page 95, on trouve un opuscule intitulé *Geometria deutsch,* Géométrie allemande, écrit attribué à Jean Hosch; il est de 1472 : il est destiné aux tailleurs de pierre et leur apprend à mener des perpendiculaires, à trouver les centres des cercles, à construire des pentagones, des hexagones et des octogones réguliers. Voici la construction du pentagone :

Soit *ab* le côté dans lequel il faut construire un pentagone : du point *a* comme centre, et d'un rayon *ab*, on décrit un cercle; du point *b* comme centre, et du rayon *ba*, on décrit un second cercle : les deux cercles se coupent en *e* et *f*, menez *ef*; du point *f* comme centre, et d'un rayon *fa*, on décrit l'arc *gabh*, coupant les deux cercles en *g* et *h*, et la droite *fe* en *k*; menez la droite *gk* qui coupe le cercle *b* en *i*, la droite *bi* est le second côté du pentagone, etc. Cette construction ne donne qu'un quasi-pentagone régulier; on la désigne ordinairement sous le nom d'Albert Durer, mais à tort.

A la page 98, on indique les moyens de tracer géométriquement un *casque* et un *bouclier*.

A la page 101 commence le livret des tracés des planches à mesurer (gabarits) par (*das Reissbüchlein*) Mathias Roritzer, maître architecte de Ratisbonne en 1486. Le style en vieux allemand est très-difficile; on y voit la construction des voûtes ogivales (*). M. Heideleff, partisan fervent de ce genre d'architecture, montre que les Byzantins connaissaient et employaient ces arcs de courbe que le divin Raphaël considérait comme d'un goût barbare. Aussi, nous ne pouvions pas manquer d'y revenir, ainsi qu'aux extravagances thaumaturgiques du moyen âge, et que des autorités respectables traitent si sérieusement, que si cette tendance continue, la restauration des bûchers consumant des sorciers ne me semble pas impossible.

On y voit, page 101, les armoiries de Guillaume, prince évêque de Eichstadt, issu de la famille ancienne, capable

(*) *Ogive* peut dériver de *gibbus*, bosse, *arc à la bosse* : on écrivait *augive*. L'épithète ne s'appliquait qu'aux arcs; voûte ogive est une expression très-récente, introduite, je crois, par Millin.

de tournois, des Reichenau en Franconie, et qui a occupé la chaire épiscopale de 1464 à 1496 ; homme très-savant, on le disait « sage comme Solon, éloquent comme Salomon ; » bon architecte et directeur de plusieurs constructions d'édifices. Il a exercé une grande influence sur la construction des *Munsters* de Ratisbonne, Ulm, etc. ; c'est à lui que Roritzer a dédié son ouvrage.

Saint-Benezet (diminutif de Benoît) est fondateur de la confrérie des Frères-Pontifes, au XII^e siècle. Il a construit le pont d'Avignon, commencé en 1184 et terminé en 1188, quatre années après la mort de Benezet.

Chez les Romains, les prêtres portaient le nom de *pontifices ;* on ignore l'origine précise de cette dénomination, qui semble se rapporter à la construction des ponts.

Varron, dans les Origines de la langue latine, dit : « *Pontifices* (*ut Q. Scævolus pontifex maximus dicebat*) *à posse et facere. Pontifices ego a ponte arbitror. Nam ab iis sublicius est factus primum et restitutus sæpe, quid eo sacra uls et cis Tiberim non mediocri ritu fiant* (lib. IV, § 83). » *Uls* est pour *ultra*.

QUESTIONS.

287. Si l'on divise d'une manière quelconque un polyèdre homogène en tétraèdres, et si l'on suppose la masse de chaque tétraèdre réunie au centre de la sphère circonscrite à ce tétraèdre, le centre de gravité de ce système de points matériels est toujours le même. (Bellavitis.)

288. Lorsque plusieurs surfaces du second ordre Σ sont circonscrites à une surface S du même ordre, tout plan cyclique de S coupe les surfaces Σ suivant des courbes dont les focales passent toutes par les deux mêmes points, qui sont réels ou imaginaires suivant que l'intersection de S et du plan considéré est imaginaire ou réelle. (Gros.)

289. Si dans un triangle rectiligne ABC, l'on a $A < B$, 1° si l'on mène aux côtés opposés les transversales AD et BE telles que CAD $\overline{\underline{<}}$ CBE, alors $AD > BE$; 2° si $AD = BE$ et $\frac{DAB}{DAC} = \frac{EBA}{EBC}$, alors $A = B$.

290. Touver le coefficient de x^{n-1} dans l'équation en x de degré $n+1$, qui a pour racines les $n+1$ coefficients binomiaux de $(a+b)^n$.

291. m et r étant des nombres entiers positifs, si l'une de ces quantités $3^m + 1$, $3^{m+r} + 1$, est divisible par 10, l'autre est aussi divisible par 10. (SENATE-HOUSE.) (*)

292. n étant un nombre positif entier, prouver que l'on a $e^n > \frac{(n+1)^n}{1.2.3\ldots n}$. (SENATE-HOUSE.)

LIEU DES SOMMETS DES ANGLES DROITS CIRCONSCRITS A L'ELLIPSE.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. G. FORCADE-PRUNET.

Soient O le centre de l'ellipse, F et F' les foyers, A'MA un angle *droit* circonscrit, A et A' étant les points de contact; prolongeons le rayon vecteur F'A jusqu'en N, de manière qu'on ait $AN = AF$, et menons MN.

MO étant une médiane, on a

$$2\,\overline{MO}^2 + 2\,\overline{OF}^2 = \overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2.$$

(*) Nom que porte, à l'Universisé de Cambridge, l'édifice où l'on fait les examens pour l'obtention des grades. Les questions sont publiées dans un journal auquel nous ferons des emprunts.

D'après un théorème de M. Poncelet,

$$\text{angle } A'MF' = AMF = AMN$$

(*Géom.* de MM. Briot et Bouquet, 2e éd., p. 112),

de sorte que

$$\text{angle } F'MN = A'MA = 90^\circ;$$

donc

$$\overline{F'N}^2 = \overline{MF'}^2 + \overline{MN}^2 = \overline{MF'}^2 + \overline{MF}^2 = 4a^2,$$

où $2a$ est le grand axe; donc

$$2\overline{MO}^2 + 2\overline{OF}^2 = 4a^2, \quad \overline{MO}^2 = 2a^2 - (a^2 - c^2) = a^2 + c^2,$$

où c est l'excentricité: ainsi MO est constant. C. Q. F. D.

Même démonstration pour l'hyperbole; on trouve

$$\overline{MO}^2 = a^2 - c^2.$$

SUR LES COURBES PLANES A ÉQUATIONS TRINOMES ET LES SURFACES A ÉQUATIONS TÉTRANOMES;

D'après M. EUZET

(Au bureau du Génie, à Toulon).

En juin 1853, M. Euzet a publié, à Toulon, une feuille lithographiée, contenant plusieurs beaux théorèmes très-généraux, énoncés sans démonstrations, attendu, dit l'auteur, qu'elles sont trop étendues pour un opuscule et trop élémentaires. Nous allons indiquer ces théorèmes, sans toutefois conserver l'ordre adopté par l'auteur, et y ajouter quelques démonstrations, qui sont, en effet, très-faciles.

I. Soit

$$(1) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$$

l'équation d'une courbe à axes quelconques; a, b, m, n sont des nombres donnés, entiers ou fractionnaires, positifs ou négatifs.

Soit encore l'équation d'une droite

$$\frac{nt}{mx} + \frac{mu}{ny} = 1;$$

t et u sont des coordonnées courantes ; x et y des coordonnées d'un point situé sur la courbe (1). Pour trouver l'équation de l'enveloppe de cette droite, on pose, comme on sait, les trois équations

$$m^2 xu + n^2 y t = mn xy,$$
$$m^2 a^m y^n u - n^2 b^{n-1} x^{m-1} t = mn(a^m y^n - b^n x^m),$$
$$b^n x^m + a^m y^n = a^m b^n.$$

C'est entre ces trois équations qu'il faut éliminer x et y; les deux premières équations linéaires en u et t donnent

$$u = \frac{n}{mb^n} y^{n+1}, \quad t = \frac{m}{na^m} x^{n+1};$$

substituant les valeurs de x, y en t et u dans la troisième équation, on obtient

$$\frac{u^{\frac{n}{n+1}}}{\left(\frac{n}{m} b\right)^{\frac{n}{n+1}}} + \frac{t^{\frac{m}{m+1}}}{\left(\frac{m}{n} a\right)^{\frac{m}{m+1}}} = 1;$$

c'est l'équation de l'enveloppe, et que l'auteur désigne sous le nom de *première conjuguée* de la courbe (1).

Cette équation a la même forme que l'équation (1) : en y opérant de la même manière, on obtient la deuxième conjuguée de l'équation (1), et ainsi de suite. Pour avoir la conjuguée de l'ordre k, posons

$$b_k = \left(\frac{n}{m}\right)^k \frac{(m+1)(2m+1)}{(n+1)(2n+1)} \cdots \frac{[(k-1)m+1]}{[(k-1)n+1]}\, b,$$

$$a_k = \left(\frac{m}{n}\right)^k \frac{(n+1)(2n+1)}{(m+1)(2m+1)} \cdots \frac{(kn+1)}{(km+1)}\, a;$$

on obtient pour équation de cette conjuguée .

$$\left(\frac{u}{b_k}\right)^{\frac{n}{1+nk}} + \left(\frac{t}{a_k}\right)^{\frac{m}{1+mk}} = 1,$$

lorsque $m = n$; cette équation devient

$$\left(\frac{u}{b}\right)^{\frac{n}{1+nk}} + \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{m}{1+mk}} = 1;$$

c'est le *premier théorème général* de M. Euzet.

Dans la supposition de $m = n$, si par un point de la courbe donnée on mène des parallèles aux axes, on obtient un parallélogramme; l'enveloppe de la diagonale qui part des axes est alors la première conjuguée.

2. Soit x_1, y_1 un point pris sur la courbe

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1,$$

et t_1, u_1 le point correspondant sur la première conjuguée; menons par ces deux points des tangentes aux courbes respectives. Soient T l'aire formée par la première tangente et les axes; T_1 l'aire formée par la seconde tangente et les axes. On a la relation

$$\mathrm{T}.\mathrm{T}_1^{n-1} = \left(\frac{ab}{2}\right)^n.$$

3. Lemme.

$$\int x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$$

$$= \frac{\nu x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{m\nu + n(\mu+\nu)} + \frac{n(\mu+\nu)a}{m\nu+n(\mu+\nu)} \int x^{m-1}dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

$$\int x^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

$$= \frac{\nu x^m (a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}}{(m\nu+n\mu+n\nu)b} - \frac{m\nu a}{(m\nu+n\mu+n\nu)b} \int x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}};$$

faisons

$$p = \left(-\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}},$$

on a

$$\int_0^p x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}+1}$$

$$= \frac{n(\mu+\nu)a}{m\nu+n(\mu+\nu)} \int_0^p x^{m-1}\,dx(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}},$$

$$\int_0^p x^{m+n-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}$$

$$= -\frac{m\nu a}{(m\nu+n\mu+n\nu)b} \int_0^p x^{m-1}\,dx\,(a+bx^n)^{\frac{\mu}{\nu}}.$$

4. Soient

$$S = \int_0^a y\,dx, \quad S_1 = \int_0^{a_1} u\,dt,$$

$$S = \int_0^a dx\left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^m\right]^{\frac{1}{n}} = a\int_0^1 dz\,(1 - z^m)^{\frac{1}{n}};$$

ou

$$x = az,$$

$$S_1 = \int_0^{a_1} dt\left[1 - \left(\frac{t}{a^1}\right)^{m_1}\right]^{\frac{1}{n_1}};$$

ou

$$m_1 = \frac{m}{1+m}, \quad n_1 = \frac{n}{1+n};$$

faisons $t = a_1 z_1$, on a

$$S_1 = a_1 \int_0^1 dz_1 (1 - z_1^{m_1})^{1+\frac{1}{n}},$$

or, d'après le lemme,

$$S_1 = \frac{a_1 m_1 (1+n)}{n + m_1(1+n)} \int_0^1 dz_1 (1 - z_1^{m_1})^{\frac{1}{n}} = p\int_0^1 dz\,(1 - z^{m_1})^{\frac{1}{n}}.$$

Posons

$$z^{m_1} = z^{\frac{m}{1+m}} = v^m, \quad z = v^{1+m};$$

d'où

$$S_1 = p(1+m)\int_0^1 v^m\,dv\,(1 - v^m)^{\frac{1}{n}},$$

et, d'après le lemme,

$$S_1 = \frac{p(1+m)n}{n+m+mn}\int_0^1 dv\,(1 - v^m)^{\frac{1}{n}};$$

donc

$$\frac{S_1}{S} = \frac{p(1+m)n}{(m+n+mn)a} = \frac{m}{n} \cdot \frac{mn(1+m)(1+n)}{(m+n+mn)(m+n+2mn)}.$$

Faisant $m = n$, on a

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+n}{2+n},$$

et de là

$$\frac{S_k}{S} = \frac{1}{2^k} \frac{(1+n)(1+2n)(1+3n)\ldots\ldots\ldots(1+kn)}{(2+n)(2+3n)\ldots\ldots\ldots[2+(2k-1)n]};$$

S est l'aire de la courbe donnée comprise entre les axes et S_k l'aire analogue de la courbe conjuguée d'ordre k. C'est le *deuxième théorème général* de M. Euzet, en supposant $m = n$ et que les courbes rencontrent les axes.

Exemples. — Faisons $m = n = 1$; la ligne donnée est une droite; la première conjuguée est une parabole ayant pour équation

$$\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{S_1}{S} = \frac{1}{3}.$$

Si $m = n = 2$,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1;$$

on a pour équation de la première conjuguée

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad S_1 = \frac{3}{8}\pi ab;$$

l'équation de la développée est

$$\left(\frac{x}{p}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{q}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad p = \frac{a^2 - b^2}{a}, \quad q = \frac{a^2 - b^2}{b};$$

d'où l'on déduit, pour l'aire de la développée,

$$\frac{3}{8}\pi\left(\frac{a^2-b^2}{ab}\right)^2.$$

4. *Troisième théorème général.* Les axes étant rectangulaires et $m = n$, si l'on fait tourner autour de l'un d'eux, comme charnière, le plan qui renferme la courbe (1) ainsi que sa $k^{ième}$ conjuguée, en nommant V et V_k les volumes respectifs engendrés par ces lignes, on trouve

$$V_k = \frac{(1+n)(1+2n)\ldots(1+kn)(2+n)(2+2n)\ldots(2+2kn)}{(3+n)(3+2n)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3+3kn)}V.$$

Démonstration. Au moyen des lemmes, on suppose $m = n$; les courbes engendrent des cônes. Si $n = 1$, on a

$$V_1 = \frac{V}{5}.$$

5. Nous omettons le quatrième théorème, cas particulier du suivant.

Cinquième théorème général. Soit

$$(1)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^{n'} + \left(\frac{z}{c}\right)^{n''} = 1$$

l'équation d'une surface.

Faisant

$$x^{kn+1} = a^{kn}x', \quad y^{k'n'+1} = b^{k'n'}y', \quad z^{k''n''+1} = c^{k''n''}z',$$

la surface dérivée a pour équation, ôtant les accents,

$$(1)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n}{1+nk}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n'}{1+n'k'}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{n''}{1+n''k''}} = 1;$$

et, en représentant par V_1, V_2, les volumes respectifs compris entre ces surfaces et les plans coordonnés, et posant

$$(1+n)(1+2n)\ldots(1+kn) = P_n,$$
$$(1+n')(1+2n')\ldots(1+k'n') = P_{n'},$$
$$(1+n'')(1+2n'')\ldots(1+k''n'') = P_{n''},$$
$$nn'+n'n''+n''n = N,$$
$$(N+nn'n'')(N+2nn'n'')(N+3nn'n'')\ldots[N+(k+k'+k'')nn'n''] = M,$$

on a

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{(nn')^{k''}(n'n'')^{k}(n''n)^{k'}\,P_n P_{n'} P_{n''}}{M}.$$

L'auteur nous a adressé la démonstration fondée sur les formules connues pour les volumes.

Note. Lorsque $n = n' = n''$, on a les surfaces étudiées par M. Lamé en 1818, alors élève ingénieur des Mines, dans l'ouvrage intitulé : *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie.* Paris, in-8 de 124 pages. Ouvrage très-rare qui fait époque, étant le point de départ des methodes métamorphiques aujourd'hui si en vogue.

QUESTION 276-277 (MÖBIUS)

(t. XII, p. 259);

PAR M. FAURE,

Lieutenant d'Artillerie.

Question 276. Trois points A, B, C étant liés de manière à conserver toujours les mêmes angles, si trois forces appliquées en ces points sont en équilibre, il faut, outre les conditions ordinaires, que les trois points et le point de rencontre des trois forces soient sur une même circonférence.

Soit M le point d'intersection des forces appliquées aux points A, B, C; elles se feront équilibre en ce point, et l'une d'elles sera égale et directement opposée à la résultante des deux autres. Au lieu de supposer que le triangle ABC soit mobile, on peut le laisser fixe, mais changer la direction des forces; supposons-donc qu'elles viennent se faire équilibre autour d'un autre point M', il faudra nécessairement que les angles en M' soient égaux à ceux placés en M, ce qui exige que les points M et M' soient sur la circonférence circonscrite au triangle ABC. Réciproquement, quelle que soit la position du point M sur cette circonférence, les forces qui y seront appliquées se feront équilibre, les forces restant les mêmes en intensité. Notre démonstration prouve aussi qu'en considérant une autre position A', B', C' du triangle ABC, ainsi que trois forces $A'M''$, $B'M''$, $C'M''$, respectivement égales et parallèles aux forces AM, BM, CM, elles se feront équilibre autour du point M''.

Question 277. Si plusieurs points sont mobiles dans un plan, de manière que la figure qu'ils forment reste toujours semblable à elle-même, et si des forces qui agissent sur ces points sont en équilibre, l'équilibre subsistera toujours pour les autres positions que l'on peut donner aux points, pourvu que les forces conservent leur direction primitive.

Supposons n forces dans le système; considérons-en deux appliquées en A et B, les $n - 2$ autres auront une résultante qui devra rencontrer en C les deux forces appliquées en A et B. Au lieu de supposer nos points mobiles, on peut les laisser fixes, mais incliner toutes les forces d'une même quantité. Il arrivera alors que la résultante de nos $n - 2$ forces (qui reste la même pour la grandeur) sera aussi inclinée du même angle sur sa direction primitive, de telle sorte qu'elle doit aller rencontrer les forces appliquées en A et B en un même point situé sur la circonférence ABC. Donc alors elles se feront équilibre autour de ce point. Les mêmes conclusions s'appliquent évidemment à des figures semblables aux précédentes.

QUESTION 278 (JACOBI)

(t. XII, p. 260);

PAR M. FAURE,

Lieutenant d'Artillerie.

Désignons par S la longueur de l'un quelconque des axes de nos surfaces; la quantité $\frac{K^2}{S^2}$ est racine d'une équation de la forme

$$S^3 - AS^2 + BS - C = 0.$$

Les valeurs des coefficients de cette équation se trouvent dans tous les Traités élémentaires, il est donc inutile de les rappeler ici. En cherchant leurs valeurs pour la première équation, on trouve :

$$\begin{aligned}
A = {} & (b'c'')^2 + (b''c)^2 + (bc')^2 + (c'a'')^2 + (c''a)^2 + (ca')^2 \\
& + (a'b)^2 + (a''b)^2 + (ab')^2; \\
B = {} & (bc')(b''c)[(ac'')(ca') + (ba'')(ab')] \\
& + (bc')(b'c'')[(ca')(c'a'') + (ab')(a'b'')] \\
& + (cb'')(b'c'')[(ac'')(c'a'') + (ba'')(a'b'')] \\
& + (a'b'')(c'a'')[(ac'')(ba'') + (ca')(ab')](ab')(ba'')(ca')(ac''); \\
C = {} & \left\{ \begin{aligned} & bc'[(ba'')(c'a'') - (ac'')(a'b'')] \\ & + cb''[(ba'')(c'a'') - (ac'')(a'b'')] \\ & + b'c''[(ab')(ac'') - (ca')(ba'')] \end{aligned} \right\}^2.
\end{aligned}$$

Pour calculer les valeurs de ces mêmes quantités relativement à la seconde équation, il suffit de remarquer que l'on passe de celle-ci à la première, en permutant les quantités a', a'', b, b'', c, c' avec b, c, a', c', a'', b'' respectivement. Or il arrive que, par cette permutation, les valeurs de A, B, C ne changent pas; donc nos deux surfaces, qui sont d'ailleurs évidemment des ellipsoïdes, ont les mêmes axes.

RELATION ENTRE LE VOLUME D'UN TÉTRAÈDRE ET LA NORME DE SA SURFACE;

D'APRÈS M. SYLVESTER.

(Cambridge and Dublin mathematical Journal, mai 1853.)

---

1. *Notation:* a, b, c, d, sommets du tétraèdre;
ab, ac, ad, bc, bd, cd, six arêtes du tétraèdre;
V = volume du tétraèdre.

On supprime partout les *facteurs numériques;* ils n'ont aucune influence sur les raisonnements qui suivent :

$$\frac{F}{16}=(bcd)^2,\quad \frac{G}{16}=(acd)^2,\quad \frac{H}{16}=(abd)^2,\quad \frac{K}{16}=(abc)^2;$$

N = norme de $F^{\frac{1}{2}}+G^{\frac{1}{2}}+H^{\frac{1}{2}}+K^{\frac{1}{2}}$ = norme de la surface du tétraèdre.

2.
$$\begin{aligned}
-F &= (bc)^4+(cd)^4+(db)^4-2(bc)^2(cd)^2\\
&\quad -2(cd)^2(db)^2-2(db)^2(bc)^2;\\
-G &= (ac)^4+(cd)^4+(da)^4-2(ac)^2(cd)^2\\
&\quad -2(cd)^2(da)^2-2(da^2)(ac^2);\\
-H &= (ab)^4+(bd)^4+(da)^4-2(ab)^2(bd)^2\\
&\quad -2(bd)^2(da)^2-2(da)^2(ab)^2;\\
-K &= (ab)^4+(bc)^4+(ca)^4-2(ab)^2(bc)^2\\
&\quad -2(bc)^2(ca)^2-2(ca)^2(ab)^2.
\end{aligned}$$

$V^2 =$ déterminant.

$$\left|\begin{matrix} 0 & ab^2 & ac^2 & ad^2 & 1 \\ ba^2 & 0 & bc^2 & bd^2 & 1 \\ ca^2 & cb^2 & 0 & cd^2 & 1 \\ da^2 & db^2 & dc^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right| \quad \left(\text{le facteur supprimé est } \frac{1}{144}\right).$$

$$N = \Sigma F^4 - 4\Sigma F^3 G + 6\Sigma F^2 G^2 + 4\Sigma F^2 GH - 40\, FGHK.$$

Σ désigne une fonction symétrique; ainsi

$$\Sigma F^4 = F^4 + G^4 + H^4 + K^4,$$

et ainsi des autres.

N renferme 22 termes positifs et 13 négatifs; en tout, 35 termes en F, G,.... Les lettres F, G, H, K renfermant chacune 6 termes, il s'ensuit que N contient $35.6^4 = 45360$ termes, fonctions des carrés des arêtes.

3. Lorsque les quatre sommets sont dans un même plan, on a évidemment

$$\sqrt{F} + \sqrt{G} + \sqrt{H} + \sqrt{K} = 0,$$

mais cette expression est un facteur de N; donc N s'anéantit dans cette supposition et aussi V; par conséquent, N renferme, comme facteur, une puissance de V; mais N est une fonction rationnelle des carrés des arêtes, fonction du huitième degré, et V^2 une fonction rationnelle des mêmes carrés et du troisième degré : on a donc

$$N = V^2 Q,$$

et Q est une fonction rationnelle des mêmes carrés et du cinquième degré; il s'agit de trouver Q.

Lorsque deux arêtes opposées deviennent nulles, Q devient aussi nul; en effet, supposons

$$ab = 0, \quad cd = 0,$$

alors

$$\begin{aligned}
-\mathrm{F} &= [(bc)^2 - (db)^2]^2,\\
-\mathrm{G} &= [(ca)^2 - (da)^2]^2,\\
-\mathrm{H} &= [(ad)^2 - (bd)^2]^2,\\
-\mathrm{K} &= [(ac)^2 - (bc)^2]^2,\\
\mathrm{F} - \mathrm{G} - &\mathrm{H} + \mathrm{K} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi N est nul; mais V^2 n'est pas nul, car V^2 est alors six fois le déterminant.

$$\begin{array}{ccccc}
0\,. & 0\,. & ac^2\,. & ad^2\,. & 1,\\
0\,. & 0\,. & bc^2\,. & bd^2\,. & 1,\\
ca^2\,. & cb^2\,. & 0\,. & 0\,. & 1,\\
da^2\,. & db^2\,. & 0\,. & 0\,. & 1,\\
1\,. & 1\,. & 1\,. & 1\,. & 0,
\end{array}$$

déterminant qui n'est pas nul, puisqu'on a le terme

$$ad^2\,.\,bc^2\,.\,cb^2\,.\,1\,.\,1,$$

et encore d'autres.

Effectuant, on trouve

$$2(ac^2\,.\,bd^2 - ad^2\,.\,bc^2)(ad^2 + bc^2 - ac^2 - bd^2)\ (*)$$

(Voir *Nouvelles Annales*, tome XI, page 301).

Or

$$\mathrm{N} = \mathrm{V}^2\mathrm{Q};$$

il faut donc que, dans cette hypothèse, Q s'annule.

Ainsi, α, β, γ étant les arêtes partant d'un sommet, et α', β', γ' les arêtes respectivement opposées, chaque terme de Q doit renfermer, soit α ou α', soit β ou β', soit γ ou γ'.

(*) Le volume n'étant pas nul, il faut que la distance des deux arêtes opposées *ab*, *cd* devienne infinie.

Supposons, maintenant,

$$ab = 0, \quad ac = 0;$$

on obtient

$$\sqrt{K} = i . \overline{bc}^2,$$
$$\sqrt{H} = i\,(\overline{ad}^2 - \overline{bd}^2),$$
$$\sqrt{G} = i\,(\overline{ad}^2 - \overline{cd}^2),$$
$$F = -bc^4 - bd^4 - cd^4 + 2\,bc^2.bd^2 + 2\,bcd^2.cd^2 + 2\,cd^2.cd^2.$$

N est le produit de ces huit facteurs :

$$(\pm\sqrt{F} - \sqrt{G} + \sqrt{H} + \sqrt{K})(\pm\sqrt{F} + \sqrt{G} - \sqrt{H} + \sqrt{K})$$
$$\times(\pm\sqrt{F} + \sqrt{G} + \sqrt{H} + \sqrt{K})(\pm\sqrt{F} + \sqrt{G} + \sqrt{H} - \sqrt{K}).$$

Les quatre premiers facteurs donnent, toujours dans la supposition $ab = 0$, $ac = 0$,

$$[F + (bc^2 + cd^2 - bd^2)^2][F + (bc^2 - cd^2 + bd^2)^2]$$
$$= 16 . bc^4 . bd^2 . cd^2.$$

Les quatre derniers facteurs donnent

$$[F + (2\,ad^2 - bd^2 - cd^2 + bc^2)^2][F + (2\,ad^2 - bd^2 - cd^2 - bc^2)^2]$$
$$= 16\begin{bmatrix} ad^4 - ad^2(bd^2 + cd^2 + bc^2) + bc^2.bd^2 + bd^2.cd^2 \\ + cd^2.bc^2 \end{bmatrix}$$
$$[ad^4 - ad^2(bd^2 + cd^2 - bc^2) + bd^2.cd^2].$$

Dans cette même hypothèse, V^2 devient

$$\begin{array}{l} 0 \;.\; 0 \;.\; 0 \;.\; ad^2\;.\; 1, \\ 0 \;.\; 0 \;.\; bc^2.\; bd^2.\; 1, \\ 0 \;.\; cb^2.\; 0 \;.\; cd^2.\; 1, \\ da^2.\; db^2.\; dc^2.\; 0 \;.\; 1, \\ 1 \;.\; 1 \;.\; 1 \;.\; 1 \;.\; 0, \end{array}$$

déterminant égal à

$$2\, bc^2 \left[ad^4 - ad^2(bd^2 + cd^2 - bc^2) + bd^2 \, cd^2\right]$$

(Voir *Nouvelles Annales*, t. XI, p. 304).

Ainsi, dans cette hypothèse, $Q = \frac{N}{V^2}$ se réduit à

$$bc^2 . bd^2 . cd^2 \left[\begin{array}{l} \quad ad^4 - ad^2(bd^2 + cd^2 + bc^2) + bc^2 . bd^2 \\ + bd^2 . cd^2 + cd^2 . bc^2 \end{array}\right],$$

le facteur supprimé est 48^2.

Ce sont tous les termes de Q qui ne renferment ni ab ni ac; donc la somme de tous les termes qui ne contiennent que les carrés de quatre arètes est donnée par la fonction symétrique

$$\Sigma\, bc^2 . bd^2 . cd^2 \left[\begin{array}{l} \quad ad^4 - ad^2(bd^2 + cd^2 . cb^2) \\ + bc^2 . bd^2 + bd^2 . cd^2 + cd^2 . bc^2 \end{array}\right],$$

il est évident qu'on peut changer b en c et c en b, b en d et d en b, c en d et d en c, de sorte que la fonction peut s'écrire

$$\Sigma\, bc^2 . bd^2 . cd^2 \left[\begin{array}{l} \quad ab^4 + ac^4 + ad^4 \\ - (ab^2 + ac^2 + ad^2)(bd^2 + dc^2 + cb^2) \\ + bc^2 . bd^2 + bd^2 . cd^2 + cd^2 . bc^2 \end{array}\right]:$$

bc, bd, cd sont les trois côtés du triangle bcd, ainsi il y a quatre expressions de cette forme. Il reste à trouver le coefficient numérique des six termes de la forme

$$ab^2 . ac^2 . ad^2 . bc^2 . bd^2 .$$

Soit λ ce facteur numérique; supposons les six arètes du tétraèdre égales chacune à l'unité; Q aura pour valeur

$$4(3 - 9 + 3) + 6\lambda = -12 + 6\lambda;$$

les arêtes étant égales, il y aura quelques facteurs de N égaux à zéro : mais V volume du tétraèdre n'est pas nul, donc Q est nul, et l'on a

$$6\lambda - 12 = 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda = 2;$$

ainsi la valeur complète de Q est (abstraction faite du facteur numérique)

$$Q = \Sigma\, ab^2.\, bc^2.\, ca^2 \left[\begin{array}{l} (da^4 + db^4 + dc^4 \\ - (da^2 + db^2 + dc^2)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \\ + ab^2.\, bc^2 + bc^2.\, ca^2 + ca^2.\, ab^2 \end{array}\right]$$
$$+ 2\,\Sigma\, ab^2.\, bc^2.\, cd^2.\, da^2.\, ac^2.$$

Le premier Σ renferme quatre expressions de cette forme, et le second Σ donne six. On peut n'admettre qu'un seul signe Σ, et alors

$$Q = \Sigma\, ab^2.\, bc^2.\, ca^2 \left[\begin{array}{l} da^4 + db^4 + dc^4 + da^2.\, db^2 + db^2.dc^2 \\ + dc^2.da^2 + ab^2.\, bc^2 + bc^2.ca^2 \\ + ca^2.ab^2 \\ - (da^2 + db^2 + dc^2)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \end{array}\right].$$

4. Nous avons vu que Q s'annule lorsque deux arêtes opposées ab, cd s'évanouissent ; il en est de même lorsqu'on a simultanément

$$ab = cd, \quad bc = ad,$$

car alors les faces $abc = acd$, $bdc = bda$: donc N s'évanouit, mais V conserve une valeur finie ; ainsi Q devient nul (*).

5. Soient r_1, r_2, r_3,..., r_8 les rayons des huit sphères

(*) Q doit aussi devenir nul lorsqu'on a généralement

$$abc + bdc = acd + bda.$$

Lorsque $abc = acd$, $bcd = bda$, deux rayons deviennent infinis. (Voir *Nouvelles Annales*, t. VI, p. 257, CATALAN.) TM.

inscrites au tétraèdre; on a évidemment

$$r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6 r_7 r_8 = \frac{(3V)^8}{N} = \frac{3^8 V^6}{Q}.$$

Donc, lorsque Q est nul, l'un au moins des rayons devient infini, et la sphère correspondante devient un plan. La propriété analogue n'a pas lieu pour le triangle. Soient f, g, h les carrés des côtés du triangle; A l'aire du triangle et V la norme de $\pm\sqrt{f}\pm\sqrt{g}\pm\sqrt{h}$, P le produit des quatre rayons des cercles inscrits; on a

$$PV = (2A)^4, \quad V = \frac{(2A)^4}{P} = A^2, \quad P = 16A^2;$$

ainsi P ne peut jamais devenir infini, à moins que A ne soit infini; alors il n'y a plus de triangle.

6. D'après la forme et la propriété de la fonction Q de caractériser, en s'annulant, une sphère infinie, l'illustre analyste conjecture que cette fonction est un *déterminant*, et qu'en désignant par Q' la fonction analogue pour le tétraèdre $a'b'c'd'$, le produit QQ', et peut-être même $\sqrt{QQ'}$ est une fonction des carrés des distances des sommets des tétraèdres, comme dans le théorème de M. Staudt (*Nouvelles Annales*, tome XI, page 299).

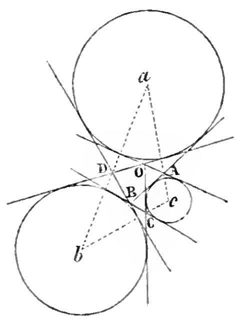
En considérant les six longueurs ab, ac, ad, bc, bd, cd comme des quantités quelconques, la divisibilité de N par V^2 constitue un beau théorème dans la *morphologie analytique*, qui doit à M. Sylvester tant de richesses, tant de précieuses découvertes.

N.B

SOLUTION DE LA QUESTION 255

(voir t. XI, p. 314); 313

Par M. MANNHEIM,
Lieutenant d'Artillerie.



Première partie. Supposons que trois des tangentes intérieures se coupent au même point O, je dis que les trois autres se coupent aussi en un même point.

Soit B le point de rencontre des deux tangentes AB, BC. Du point B je mène au cercle b la tangente BD; il suffit de démontrer que cette droite est tangente au cercle a.

Le quadrilatère OABC étant circonscrit au cercle c, on a

$$\text{OA} + \text{AB} = \text{OC} + \text{BC}.$$

Le quadrilatère OABC étant circonscrit au cercle b, on a

$$\text{OC} + \text{CB} = \text{BD} + \text{OD}.$$

De ces deux égalités on déduit

$$\text{OA} + \text{AB} = \text{BD} + \text{OD}.$$

Le quadrilatère OABD est donc circonscriptible, et comme trois des côtés sont tangents à la même circonférence a, le quatrième côté BD doit aussi être tangent à cette même circonférence. C. Q. F. D.

Remarque. On peut considérer les points O, B comme foyers d'une ellipse qui passerait par les points D, C, A. Cette conique est tangente en ces points aux lignes des centres des trois cercles donnés.

La deuxième et la troisième partie de la question se démontrent de même.

CONDITION D'ÉQUILIBRE DU DOUBLE CONE SUR DEUX DROITES CONCOURANTES ET ÉGALEMENT INCLINÉES SUR LE PLAN HORIZONTAL;

Par M. Henri FLEURY.

On sait qu'abstraction faite du frottement, un corps, soumis à la seule action de la pesanteur, ne saurait être en équilibre ni remonter sur un plan incliné; cependant on voit, dans quelques cabinets de physique, deux appareils présentant des phénomènes qui semblent contredire ce principe. Le premier est un cylindre de bois qui, en roulant sur sa surface convexe, remonte un plan incliné: le cylindre renferme une masse de plomb située près de cette surface. On comprend que le mouvement ascendant du corps sur le plan est dû à la position du centre de gravité et au frottement.

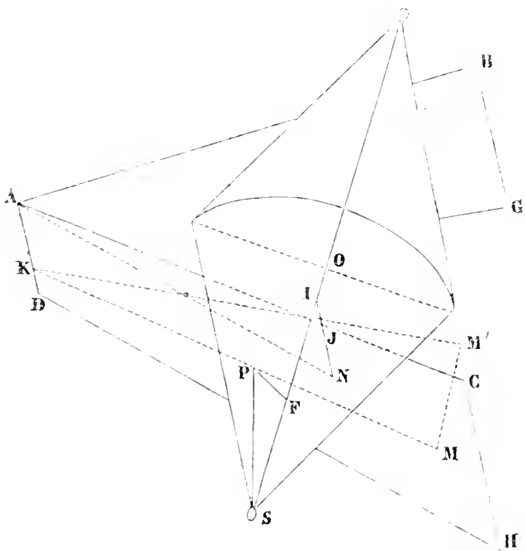
Le second appareil est un double cône qui roule en remontant sur deux droites concourantes et également inclinées sur le plan horizontal. Le double cône remonte sur ces droites en ce sens que les points où il s'appuie sur elles, s'élèvent pendant le mouvement : dans le fait, le corps descend en s'engageant entre ces deux droites, qui servent à en diriger le mouvement, et auxquelles je donnerai, pour cela, le nom de *directrices*.

Mais pour que le double cône présente ce phénomène paradoxal, il faut que l'angle des directrices et leur inclinaison sur le plan horizontal soient pris de grandeur convenable; car si, sans faire varier l'angle de ces droites, on augmente suffisamment leur inclinaison sur le plan horizontal, on verra le corps se mouvoir en sens contraire. Or, le mouvement pouvant avoir lieu dans l'un ou l'autre sens, suivant la grandeur de cette inclinaison, on comprend que pour une certaine valeur intermédiaire, le corps restera en équilibre sur les deux directrices, et la question que je me propose ici consiste à trouver l'expression analytique de la condition de cet équilibre entre les variables dont il dépend.

Il faut bien remarquer que le frottement n'entre pour rien dans l'équilibre dont nous nous occupons contrairement à ce qui a lieu pour tout équilibre d'un corps pesant sur un plan incliné; ainsi, quoique les deux directrices déterminent un plan incliné, le corps ne saurait être considéré comme posé sur ce plan, mais bien sur les deux plans tangents au cône conduits suivant ces droites. Le cas d'équilibre répondrait à celui où l'intersection de ces plans serait horizontale, et cette condition exprimée analytiquement donnerait la formule cherchée. Mais on peut arriver au même résultat de bien des manières différentes, et je m'arrêterai aux deux suivantes :

1°. D'abord je dis qu'il est nécessaire et suffisant pour l'équilibre, que la verticale menée par le centre de gravité du corps, supposé homogène et placé symétriquement par rapport aux deux directrices, rencontre la droite qui joint les points de contact. Cette condition est nécessaire, puisque si la force qui représente le poids du corps ne rencontrait pas cette droite, elle ne pourrait pas s'y détruire entièrement; car deux points fixes, susceptibles d'une résistance indéfinie en tout sens, ne pouvant détruire une force qu'autant que celle-ci est dans un même plan avec eux, à plus forte raison en est-il ainsi de nos points de contact, dont chacun ne peut opposer qu'une résistance normale à la directrice correspondante. En second lieu, cette condition est suffisante, puisqu'on reconnaît à priori qu'il y a toujours un cas d'équilibre possible, et que cet équilibre ne saurait exister quand la rencontre n'a pas lieu.

Fig. 1.



Je prendrai pour axe des z l'axe même du cône, pour axe des y le diamètre vertical de sa base, et pour axe des x le diamètre horizontal de cette même base. Je représenterai par m l'angle que fait l'axe du cône avec sa génératrice, par α l'inclinaison du plan des directrices AB, AC sur le plan horizontal, et par 6 la moitié de l'angle des plans verticaux menés suivant ces droites.

Cela posé, soient P (*fig.* 1) un point quelconque de la surface du cône, et F sa projection sur l'axe des z. La génératrice SP faisant avec cet axe un angle que nous avons désigné par m, on a

$$FP = SF \tang m, \quad \text{ou} \quad FP = (h - z) \tang m,$$

en appelant h la hauteur du cône; mais on a aussi

$$\overline{FP}^2 = x^2 + y^2,$$

donc

$$x^2 + y^2 = (h - z)^2 \tang^2 m.$$

Cette relation ayant lieu pour un point quelconque de la surface du cône, est l'équation même de cette surface.

Pour avoir l'équation du plan vertical ACH, M un de ses points, M′ la projection de ce point sur la base du cône, et M′K perpendiculaire à l'intersection AD des deux plans verticaux. L'angle MKM′ sera celui que nous avons désigné par 6, et l'on aura

$$MM' = M'K . \tang 6;$$

mais on a aussi

$$MM' = z, \quad M'K = l + x,$$

en représentant par l la distance du centre à la verticale AD, donc

$$z = (l + x) \tang 6.$$

Telle est l'équation du plan AH.

Si l'on y joint celle du cône, elles représenteront simultanément leur commune intersection.

L'élimination de z entre ces deux équations donne l'équation de la projection de cette courbe sur le plan de la base; on trouve ainsi

$$(1)\quad x^2+y^2=\operatorname{tang}^2 m\,(h^2+\operatorname{tang}^2 \beta\,(l+x)^2-2h\operatorname{tang}\beta\,(l+x)).$$

Si l'on y fait $x=0$, on obtiendra pour y l'ordonnée du point où l'ellipse que représente cette équation est rencontrée par la verticale menée du centre du corps. Cette valeur de y est

$$\operatorname{tang} m\,(l\operatorname{tang}\beta-h).$$

La tangente menée à cette ellipse par le point

$$(x=0,\quad y=\operatorname{tang} m\,(l\operatorname{tang}\beta-h))$$

fait précisément avec l'axe des x, ou avec le plan horizontal, l'angle que nous avons désigné par α; et l'on sait qu'on obtient la tangente trigonométrique de l'angle que cette droite fait avec l'axe des x, en prenant la dérivée de y par rapport à x dans l'équation de la courbe, et substituant aux coordonnées courantes celles du point de contact. Or l'équation (1) donne

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{tang}^2 m\operatorname{tang}\beta\,(l\operatorname{tang}\beta+x\operatorname{tang}\beta-h)-x}{y},$$

qui devient

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{tang}^2 m\operatorname{tang}\beta\,(l\operatorname{tang}\beta-h)}{\operatorname{tang} m\,(l\operatorname{tang}\beta-h)},$$

ou

$$\frac{dy}{dx}=\operatorname{tang} m\ \operatorname{tang}\beta,$$

quand on y fait

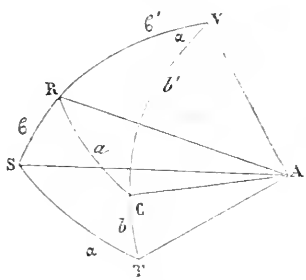
$$x=0\quad\text{et}\quad y=\operatorname{tang} m\,(l\operatorname{tang}\beta-h);$$

on a donc

$$\tang \alpha = \tang m \tang \beta.$$

Telle est la relation très-simple qui exprime la condition nécessaire et suffisante entre les trois angles m, α et β, pour l'équilibre du double cône sur deux droites qui se rencontrent et qui font un même angle avec le plan horizontal.

Fig. 2.



Au lieu de β, on pourrait donner le demi-angle b des deux directrices, et au lieu de α, l'angle a que fait chacune d'elles avec le plan horizontal.

Pour découvrir ce que devient alors la relation trouvée plus haut, soient AV (*fig.* 2) l'intersection du plan des deux directrices avec le plan horizontal mené par leur point de rencontre; AR l'intersection de ce plan horizontal avec le plan vertical conduit suivant la directrice AC; AS l'intersection du même plan horizontal avec le plan vertical mené par la bissectrice AT de l'angle des deux directrices. Joignons ensuite, par des arcs de grands cercles, les points où ces droites percent la surface d'une sphère décrite du point A; on aura

$$\mathrm{CVR} = \alpha, \quad \mathrm{CR} = a, \quad \mathrm{RS} = \beta, \quad \mathrm{CT} = b,$$

$$\mathrm{RV} = \frac{\pi}{2} - \beta = \beta', \quad \mathrm{CV} = \frac{\pi}{2} - b = b'.$$

Maintenant le triangle sphérique CRV, rectangle en R, donne

$$\tang \alpha = \frac{\tang a}{\sin \beta'} \quad \text{ou} \quad \tang \alpha = \frac{\tang a}{\cos \beta};$$

$$\cos \beta' = \frac{\cos b'}{\cos a} \quad \text{ou} \quad \sin \beta = \frac{\sin b}{\cos a};$$

$$\sin b' = \frac{\sin a}{\sin \alpha} \quad \text{ou} \quad \cos b = \frac{\sin a}{\sin \alpha}.$$

De ces trois équations et de $\tang \alpha = \tang m \tang \beta$, on déduit

$$\tang m = \frac{\tang \alpha}{\tang \beta} = \frac{\tang a}{\sin \beta} = \frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin \alpha}{\tang b}.$$

Si l'angle m a une valeur supérieure à celle qui lui est assignée par cette formule, le double cône remontera sur les deux directrices en s'éloignant de leur point de rencontre; dans le cas contraire, il roulera en sens opposé.

On peut d'ailleurs prouver que la relation

$$\tang m = \frac{\tang a}{\sin \beta} = \ldots,$$

que nous venons d'établir, se rapporte bien au cas d'équilibre. En effet, si l'on cherche la distance de l'axe du cône au plan horizontal conduit par le point de rencontre des deux directrices, on voit que, dans ce cas, elle est égale à la verticale IN (*fig.* 1) menée par le point de contact J, entre cet axe et l'horizontale AN. Or,

$$IN = IJ + JN = SI \tang m + AN . \tang a;$$

d'autre part, on a

$$OI = h - SI \quad \text{et} \quad OI = AN . \sin \beta,$$

d'où

$$h - SI = AN \sin \beta.$$

Reportant la valeur de SI tirée de cette dernière équation dans

$$\text{IN} = \text{SI} \operatorname{tang} m + \text{AN} \operatorname{tang} a,$$

on obtient

$$\text{IN} = h \operatorname{tang} m + \text{AN} (\operatorname{tang} a - \sin 6 \operatorname{tang} m),$$

relation qui, à cause de

$$\operatorname{tang} m = \frac{\operatorname{tang} a}{\sin 6},$$

se réduit à

$$\text{IN} = h \operatorname{tang} m.$$

La valeur de IN est donc constante. Ainsi, toutes les fois que notre formule sera vérifiée, la distance du centre de gravité du double cône au plan horizontal restera la même, quelque part qu'on le place sur les directrices. Il ne pourra donc tendre à se mouvoir d'un côté plutôt que du côté opposé

2°. Pour donner une seconde solution de la même question, je démontrerai d'abord que, pour l'équilibre, il est suffisant et nécessaire que le plan qui passe par le centre et les deux points de contact soit vertical. En effet, ce plan étant vertical, la force p, que je suppose représenter le poids du corps, y sera comprise. Si par les points de contact nous menons dans ce plan des perpendiculaires aux génératrices correspondantes, elles seront aussi normales aux plans tangents conduits suivant les directrices, et, par conséquent, aux directrices elles-mêmes, et, de plus, elles se rencontreront en un point de la direction de la force p. Cette force pourra donc se décomposer en deux autres, dirigées suivant ces normales et détruites par les points de contact. Il est donc établi que, pour l'équilibre, il suffit que le plan mené par le centre du corps et les deux points où il s'appuie sur les directrices, soit vertical. J'ajoute que cette condition est nécessaire; car si ce plan, au lieu d'être vertical, faisait un certain angle i avec la direction de la force p, cette force pourrait se décomposer en deux autres, l'une normale au plan et l'autre située dans ce plan : celle-ci pourrait être remplacée par deux forces qui iraient se détruire aux points de contact, comme il vient d'être expliqué plus haut; l'autre, dont la valeur serait $p \sin i$, donnerait lieu à un couple qui ferait tourner le corps et aurait pour moment $p\,(h - z) \sin i \operatorname{tang} m$, le z se rapportant ici au point où la directrice touche le cône.

Reprenons donc le cas où le plan est vertical : la directrice AC et la composante correspondante de la force p étant perpendiculaires entre elles, si l'on multiplie l'un par l'autre les cosinus que leurs directions font avec chacun des axes des coordonnées, on obtiendra trois produits dont la somme devra être nulle; mais on voit tout d'abord que le produit relatif à l'axe des x sera nul lui-même, puisque la direction de la composante est perpendiculaire à cet axe. Les cosinus des angles que la directrice AC fait avec les deux autres axes ont pour valeurs $-\sin a$ et $\sin b$; ceux qui se rapportent à la composante de la force sont $\cos m$ et $\sin m$; donc

$$\sin b \sin m - \sin a \cos m = 0,$$

d'où

$$\operatorname{tang} m = \frac{\sin a}{\sin b}.$$

C'est la relation que nous avions déjà trouvée, par une autre voie, entre les trois angles m, a et b.

LETTRE DE NEWTON A RICHARD BENTLEY,
Sur les ouvrages à lire pour comprendre les Principia.

Le célèbre philologue Richard Bentley, esprit vigoureux, voulut être en état de lire les *Principia,* et consulta à cet effet l'illustre auteur, son ami et son collègue. C'était en 1691, quatre années après la première édition (*). Bentley avait trente ans, et Newton quarante-neuf ans. La lettre, écrite en anglais, existe dans les archives du collége de la Trinité. « Après les Éléments » d'Euclide, il faut apprendre les éléments des sections » coniques. A cet effet, vous lirez, soit la première par- » tie des *Elementa curvarum* de Jean de Witt (**), ou » le Traité récent des sections coniques de de la Hire, » ou l'Épitome d'Apollonius du Dr Barrow.

» Pour l'algèbre, lisez d'abord l'introduction de Bar- » tholin, et ensuite parcourez les problèmes répandus çà » et là dans les commentaires de la Géométrie de Des- » cartes et autres écrits algébriques de François Schooten ;

(*) La première édition a paru vers le milieu de l'été de 1687. Deux années après, le 15 janvier 1689, Newton fut élu un des représentants de l'Université de Cambridge, au parlement dit *Convention.* A l'occasion de cette édition, Laplace dit : « *Les principes du système social furent posés » l'année suivante, et Newton concourut à leur établissement.* » (*Système du Monde,* page 372, 1824.) On voit que ce n'est pas l'année *suivante.* Ce parlement, prorogé le 27 janvier 1690, fut dissous le 6 février suivant. Newton fut réélu le 26 novembre 1701 au parlement dissous le 2 juillet 1702; mais il échoua dans les élections du 17 mai 1705. La phrase de Laplace, supprimée dans les éditions faites sous le premier Empire, et a été mise au bas de la page 429 du tome VI de l'édition nationale de 1846.

(**) Le célèbre pensionnaire. (Voir Chasles, *Aperçu historique*, p. 100. *Elementa linearum curvarum.* Leyde, 1650.) Ce grand et honnête homme fut massacré par la populace, partout d'une stupidité féroce.

» je ne pense pas que vous devrez lire en entier tout ces » commentaires, mais seulement les solutions des pro» blèmes que vous rencontrerez par ci par là. Vous pou» vez trouver reliés ensemble les *Elementa curvarum* de » de Witt, l'introduction de Bartholin et les commen» taires de Schooten.

» Pour l'astronomie, lisez d'abord la courte exposi» tion du système copernicien à la fin de l'Astronomie de » Gassendi, et alors, en plus l'Astronomie de Mercator, » pour ce qui concerne le même système, et, dans l'Ap» pendice, les nouvelles découvertes faites dans les cieux » par le télescope.

» Ceci suffit pour comprendre mon livre; mais si vous » pouvez vous procurer le *Horologium oscillatorium* » d'Huyghens, la lecture de cet ouvrage vous rendra » beaucoup mieux préparé.

» A une première lecture de mon livre, c'est assez si » vous comprenez les propositions avec quelques-unes des » démonstrations plus faciles que le reste. Lorsque vous » comprendrez les plus aisées, elles vous donneront accès » aux plus difficiles. Lorsque vous aurez lu les soixante » premières pages, passez au III^e^ livre, et quand vous » connaîtrez le plan de ce livre, vous pourrez revenir en » arrière sur les propositions que vous désirez connaître, » ou même lire le tout en ordre si vous le jugez conve» nable. » (*Correspondence of sir Isaac Newton and professor Cotes, by Edlestone*. London, 1850.)

Note. Il est très à désirer qu'on ait une traduction de la vie de Newton publiée par M. Brewster. Un géomètre distingué a demandé à l'auteur l'autorisation aujourd'hui nécessaire. Il n'a pas daigné répondre. Dans une collection intitulée *Bibliothèque pour les deux sexes*, on a publié une traduction abrégée de cet ouvrage, où les découvertes de Newton sont supprimées. Une telle traduction rappelle le *traduttore traditore* des Italiens. C'est peut-être le souvenir de cette trahison qui fait que l'illustre physicien ne veut plus entendre parler de traducteurs, et qui explique un silence qui ne semble pas s'accorder avec la politesse d'un *gentleman*.

Sur les rayons solaires obscurs.

Dans la correspondance de Newton et de Cotes, si savamment publiée par M. Edlestone (*), on lit à la page 262 une lettre de Newton qui semble se rattacher à la théorie moderne des interférences et des rayons purement calorifiques, etc. Un certain Dr Joshua Maddock avait envoyé des spécimens d'une nouvelle branche d'optique roulant sur la considération des propriétés des *rayons obscurs* (dark rays). La réponse suivante de Newton montre qu'il attachait une grande importance à ces considérations :

Vir dignissime, specimina illa optica, quæ pro humanitate tua ad me misisti, tantam in his rebus peritiam ostendant, ut non possum quia doleam incertudinem principiorum quibus omnia innituntur. Etenim quæri potest, an sint in rerum natura radii tenebrosi, et, si sint, an radii illi, secundum aliam legem refringi debeant, quam radii lucis. Defectu experientiæ, nescio prorsus quid de his principiis sentiendum sit. Neque hinc difficultati tollendæ quam tu teipse indigistati facile adfuerit Tiberius (**). *At positis ejusmodi radiis, una cum lege refractionis quam tu assumis, cætera rectè se habent; neque propositiones tantum utiles sunt ac demonstrationes artificiosæ, sed, et quod majus est, omnia nova proponis, quæ opticam, altera sui parte, auctura sunt,*

(*) *Correspondence of sir Isaac Newton and professor Cotes, etc., by* **J. Edlestone** *fellow of Trinity college Cambridge.* London, 1850. In-8 de 316 pages.

On lit une analyse très-impartiale, très-instructive de cet ouvrage dans le *Journal des Savants* (1852). Étant écrite avec une grande lucidité et pureté de langage, il est inutile d'ajouter qu'elle sort de la plume de l'illustre doyen de l'Académie des Sciences.

(**) Suétone dit que Tibère avait la faculté de voir clair dans les ténèbres, à petite distance.

si modo defectus experientiæ in stabiliendis principiis aliquo demum modo suppleri possit. Interim, quod me meditationum tuarum perquam subtilium participem fieri dignatus sis, gratias ago. Valè. (*Trin. Coll. Cant.*, feb. 7, 167 $\frac{8}{9}$.)

Ce *defectus experientiæ* n'existe plus, et, dès 1679, Newton a prévu les progrès actuels de cette nouvelle branche d'optique. Il serait du plus haut intérêt de retrouver la lettre du Dr Maddock. Une personne de ce nom a pris un degré universitaire au collége de Jésus en 1661.

BIOGRAPHIE.

BACHELIER (Charles-Louis-Étienne),

Imprimeur-Libraire à Paris.

Pour amener asymptotiquement l'homme à la perfection que jamais il n'atteindra complétement ici-bas, Dieu a déposé dans le cœur un irrésistible aiguillon : le désir de vivre avec estime dans le souvenir des générations à venir. Là est le secret d'immenses travaux, de pénibles sacrifices, et, quelquefois, de sublimes abnégations. Autrefois les traditions, les monuments, les inscriptions, les médailles, les manuscrits étaient les seuls moyens de satisfaire ce désir. Mais les traditions s'altèrent, s'affaiblissent, s'oublient; les inscriptions s'effacent; les médailles se rouillent, les manuscrits n'échappent pas à la dent corrosive du temps, et tous sont circonscrits dans des espaces assez restreints. L'Imprimerie seule ne connaît de limites ni dans la durée ni dans l'espace; brave les injures du temps, et prend pour horizon celui du monde. Depuis la découverte de Guttemberg, qui a fait de nouveau planer l'esprit divin sur la face des choses, depuis quatre siècles l'esprit humain a fait plus de progrès que dans les cinquante siècles plus ou moins historiques qui les ont précédés (*). Aussi la reconnaissance n'a pas fait défaut à ces hommes généreux qui ont sacrifié des journées et des veilles à nous transmettre les produits du génie avec pureté, correction, et portant le cachet d'une sévère et régulière beauté. Tels étaient les Henri Estienne, les Elzevirs, les Vascosan, les Cramoisi, les Aldes, les Juntes, les Bodoni, les Didot, etc., noms environnés de respect et de considération. Tel était le fondateur de l'imprimerie mathématique, l'homme dont nous allons esquisser la vie.

Charles-Louis-Étienne BACHELIER est né, en 1777, d'une famille honnête, d'une condition modeste, dans la petite ville de Châblis (Yonne), de l'ancien Auxerrois. La jeunesse du jeune Bourguignon ne présente de remarquable qu'un penchant, très-prononcé et toujours croissant, pour les *beaux* livres, les belles impressions. Appelé sous les armes à l'âge requis par la loi, il fut incorporé dans le 8me régiment de dragons, mais il ne resta qu'une année au service, pour cause de myopie. Le congé porte qu'il servit avec *honneur* et *probité*.

Rentré dans la vie civile, entraîné par sa passion dominante, il embrassa avec ardeur la carrière de la librairie; se rendit, vers 1800, à Paris, et entra dans la li-

---

(*) L'état stationnaire des races asiatiques tient à l'absence de l'imprimerie. Les Israélites lisent encore, dans le temple, le Pentateuque dans des manuscrits. Quant aux Chinois, l'absence d'une écriture alphabétique occasionne une perte considérable de temps stérilement employé à une etude de *formes*.

brairie militaire de Magimel (*), qui a continué avec tant de succès, et pendant si longtemps, l'ancienne maison de Jombert. Généreux et intelligent, Magimel, appréciant bientôt les qualités de son apprenti, devint son ami et son protecteur. Il l'aida d'abord à établir une petite librairie, et ensuite lui facilita les moyens d'épouser, en 1804, la fille de Courcier, éditeur de tant de chefs-d'œuvre mathématiques et fondateur d'une maison connue de tous les géomètres. De 1804 à 1821, Bachelier ne fut qu'un libraire ordinaire, dans le sens commercial du mot. Ce n'est qu'à partir de 1821, époque où il succéda à sa belle-mère, madame veuve Courcier, qu'on voit se développer chez lui cette activité passionnée, reproductrice de grandes œuvres. Il ne recule devant aucun sacrifice pour propager les ouvrages de Lagrange, Laplace, Monge, Lacroix, Delambre, Poisson, etc., ces illustrations du temps passé, et aussi les travaux des savants contemporains, et pour éditer des vastes collections techniques, telles que Christian, Borgnis, etc. Ayant acquis, en 1832, l'ancienne imprimerie de Courcier (**), il introduisit dans cette nouvelle profession un esprit de progrès et de perfectionnement dont nous devons donner une idée.

A part le génie, à part le style, d'une pureté, d'une limpidité si inimitables, Lagrange a introduit dans les sciences mathématiques ce qu'on peut appeler le *bon goût*. Il s'appliqua à économiser les symboles, à réduire au plus petit nombre les équations, les formules, à rendre les unes et les autres courtes, expressives, parlantes, mnémoniques. Tout cela s'adresse à l'intelligence, la récrée, lui donne contentement; mais l'œil extérieur qu'il faut satisfaire aussi a d'autres exigences. Il veut que les lettres,

(*) Successeur de Blouet, qui avait succédé à Jombert.

(**) Successeur de Duprat.

les signes, les formules, âme de l'arithmétique universelle, soient nettement dessinés, symétriquement arrangés, dans et sur des lignes bien nivelées, convenablement justifiées, distancées. Ce sont ces conditions matérielles, si importantes pour l'esprit, que Bachelier a sans cesse cherchées et enfin obtenues. Ces mêmes qualités, ces mêmes soins, se trouvent dans toutes ses publications périodiques : *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, Journal de l'École Polytechnique, Journal de Mathématiques* de M. Liouville, *Nouvelles Annales de Mathématiques, Annales de Chimie et de Physique*, etc.

Toutefois, il est juste de dire qu'il a été merveilleusement secondé par M. Bailleul (*), prote zélé avec discernement, actif avec ordre, comprenant toutes les manipulations, les surveillant avec conscience. C'est sous cette habile direction que s'est formée une pépinière d'ouvriers adroits devenus typographes artistes, et qui ont donné à cette imprimerie mathématique une réputation européenne.

Bachelier obtint, à l'Exposition nationale de 1849, la Médaille d'argent : il méritait mieux. Toutefois, la vraie décoration n'est pas celle qui brille sur l'habit ; c'est celle qui est dessous. Ce sont les sentiments généreux, dans le sein de l'honnête homme, qui ornent pendant la vie, et encore outre-tombe. Enfin, éprouvé cruellement par la perte d'une femme chérie, d'un fils unique, ancien élève de l'École Polytechnique, après un demi-siècle de labeurs et de soucis, Bachelier trouva le repos et sans doute la palme du juste, vers la fin de 1852, léguant à ses enfants un nom respecté, une maison de haute réputation et un digne successeur.

(*) Inventeur, en 1838, d'un nouveau système de *justification* très-ingénieux et susceptible d'une précision mathématique.

M. Mallet-Bachelier, son gendre, quitte une position honorable dans la magistrature pour assumer une grave responsabilité commerciale, soutenir, continuer et améliorer encore un établissement dont la célébrité est un patrimoine de famille. Puisse le succès couronner un dévouement filial si rare!

Je crois être l'organe de tous les géomètres en exprimant ce vœu, vœu de reconnaissance pour le passé, d'espérance pour l'avenir. O. Terquem.

MÉTHODE MÉTAMORPHIQUE PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES;

D'après M. Joseph LIOUVILLE.

(Journal de Mathématiques, tome XII, page 365; 1847.

---

1. *Problème.* — Entre les six variables x, y, z, x', y', z', on a les huit équations

$$\begin{aligned} \xi &= f(x, y, z), & \xi' &= f(x', y', z'); \\ \eta &= F(x, y, z), & \eta' &= F(x', y', z'); \\ \zeta &= \varphi(x, y, z), & \zeta' &= \varphi(x', y', z'); \\ p &= \psi(x, y, z), & p' &= \psi(x', y', z'); \end{aligned}$$

quelles formes faut-il donner aux quatre fonctions f, F, φ, ψ pour qu'on ait l'identité

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & p^2 p'^2 [(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2] \\ & = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2. \end{aligned} \right.$$

Solution. Soient x_0, y_0, z_0 certaines valeurs particulières de x', y', z'; l'identité devient

$$p^2 p_0^2 [(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2] \\ = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2.$$

Les indices o indiquent ce que deviennent les fonctions par ces substitutions; faisons

$$\begin{array}{lll} \xi - \xi_0 = t, & \eta - \eta_0 = u, & \zeta - \zeta_0 = v, \\ x - x_0 = x_1, & y - y_0 = y_1, & z - z_0 = z_1, \\ \xi' - \xi_0 = t', & \eta' - \eta_0 = u', & \zeta' - \zeta_0 = v', \\ x' - x_0 = x'_1, & y' - y_0 = y'_1, & z' - z_0 = z'_1; \end{array}$$

nous aurons

$$p^2 p'^2 [(t - t')^2 + (u - u')^2 + (v - v')^2] \\ = (x_1 - x'_1)^2 + (y_1 - y'_1)^2 + (z_1 - z'_1)^2,$$

$$p^2 p_0^2 (t^2 + u^2 + v^2) = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

$$p'^2 p_0^2 (t'^2 + u'^2 + v'^2) = x'^2_1 + y'^2_1 + z'^2_1.$$

Éliminant p et p' de ces équations et posant

$$\begin{array}{ll} t^2 + u^2 + v^2 = \rho^2, & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r^2, \\ t'^2 + u'^2 + v'^2 = \rho'^2, & x'^2_1 + y'^2_1 + z_1^2 = r'^2, \end{array}$$

on obtient

$$\frac{1}{\rho^2} - \frac{t'}{\rho'^2}\frac{t^2}{\rho^2} - 2\frac{u'}{\rho'^2}\frac{u}{\rho^2} - 2\frac{v'}{\rho'^2}\frac{v}{\rho^2} = -\frac{1}{\rho'^2} \\ + p_0^4 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} - \frac{2}{r^2 r'^2}(x_1 x'_1 + y_1 y'_1 + z_1 z'_1)\right].$$

Donnons maintenant successivement à x'_1, y'_1, z'_1 quatre valeurs *déterminées;* conséquemment, à chacun de ces systèmes de valeurs correspondent des valeurs *déterminées* de x', y', z'; ξ', η', ζ'; t', u', v'; ρ', r'.

On a donc quatre équations du premier degré entre les quatre inconnues

$$\frac{1}{\rho^2}, \quad \frac{t}{\rho^2}, \quad \frac{u}{\rho^2}, \quad \frac{v}{\rho^2};$$

on en déduit, par les formules de Cramer,

$$\frac{t}{\rho^2} = A + \frac{P}{r^2}, \quad \frac{u}{\rho^2} = B + \frac{Q}{r^2}, \quad \frac{v}{\rho^2} = C + \frac{R}{r^2}, \quad \frac{1}{\rho^2} = D + \frac{S}{r^2},$$

A, B, C, D étant des quantités connues fonctions des quatre valeurs particulières de x'_1, y'_1, z'_1 et P, Q, R, S des fonctions entières et *linéaires* de x_1, y_1, z_1.

Élevant les quatre premières de ces équations au carré et les ajoutant, on a

$$A^2 + B^2 + C^2 + \frac{2(AP + BQ + CR)}{r^2}$$
$$+ \frac{P^2 + Q^2 + R^2}{r^4} = \frac{1}{\rho^2} = D + \frac{S}{r^2}.$$

Chassant le dénominateur, et considérant que P, Q, R, S, r sont des fonctions entières de x_1, y_1, z_1, on voit que $P^2 + Q^2 + R^2$ doit être divisible par r^2; mais le dividende et le diviseur étant de même degré, le quotient ne renferme plus de variables : représentant ce quotient par la constante m, on a

$$P^2 + Q^2 + R^2 = mr^2 = m(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2).$$

Faisons

$$\begin{aligned} P &= m(ax_1 + by_1 + cz_1), \\ Q &= m(a'x_1 + b'y_1 + c'z_1), \\ R &= m(a''x_1 + b''y_1 + c''z_1). \end{aligned}$$

Nous ne mettons pas de constantes, parce que, en substituant ces valeurs de P, Q, R dans la dernière équation, la somme des carrés de ces constantes devrait être nulle; cette substitution donne les relations

$$\begin{aligned}
a^2 + a'^2 + a''^2 &= 1, \quad & ab + a'b' + a''b'' &= 0,\\
b^2 + b'^2 + b''^2 &= 1, \quad & bc + b'c' + b''c'' &= 0,\\
c^2 + c'^2 + c''^2 &= 1, \quad & ca + c'a' + c''b'' &= 0,
\end{aligned}$$

équations qu'on rencontre dans le passage de coordonnées rectangulaires à d'autres coordonnées rectangulaires; et ces relations, comme on sait, en entraînent encore six autres.

Remplaçant x_1, y_1, z_1 par leurs valeurs $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= m[a\ (x - x_0) + b\ (y - y_0) + c\,(z - z_0)],\\
\mathrm{Q} &= m[a'\,(x - x_0) + b'\,(y - y_0) + c'\,(z - z_0)],\\
\mathrm{R} &= m[a''(x - x_0) + b''(y - y_0) + c''(z - z_0)].
\end{aligned}$$

Faisons

$$\mathrm{A} + \frac{\mathrm{P}}{r^2} = \mathrm{T}, \quad \mathrm{B} + \frac{\mathrm{Q}}{r^2} = \mathrm{U}, \quad \mathrm{C} + \frac{\mathrm{R}}{r^2} = \mathrm{V},$$

et remplaçons t, u, v par $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$, $\zeta - \zeta_0$; nous obtiendrons

$$\xi - \xi_0 = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}^2 + \mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2}, \quad \eta - \eta_0 = \frac{\mathrm{U}}{\mathrm{T}^2 + \mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2},$$

$$\zeta - \zeta_0 = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{T}^2 + \mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2}.$$

Il reste à trouver p; or,

$$(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2 = \frac{(\mathrm{T} - \mathrm{T}')^2 + (\mathrm{U} - \mathrm{U}')^2 + (\mathrm{V} - \mathrm{V}')^2}{(\mathrm{T}^2 + \mathrm{U}^2 + \mathrm{V}^2)(\mathrm{T}'^2 + \mathrm{U}'^2 + \mathrm{V}'^2)},$$

$$(\mathrm{T} - \mathrm{T}')^2 + (\mathrm{U} - \mathrm{U}')^2 + (\mathrm{V} - \mathrm{V}')^2 = \frac{m^2\,[(\mathrm{P} - \mathrm{P}')^2 + (\mathrm{Q} - \mathrm{Q}')^2 + (\mathrm{R} - \mathrm{R}')^2]}{(\mathrm{P} + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2)(\mathrm{P}'^2 + \mathrm{Q}'^2 + \mathrm{R}'^2)};$$

les relations entre les a, b, c donnent

$$(\mathrm{P}-\mathrm{P}')^2+(\mathrm{Q}-\mathrm{Q}')^2+(\mathrm{R}-\mathrm{R}')^2$$
$$=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2,$$

donc

$$(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2$$
$$=\frac{m^2[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]}{(\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2+\mathrm{R}^2)(\mathrm{P}'^2+\mathrm{Q}'^2+\mathrm{R}'^2)(\mathrm{T}^2+\mathrm{U}^2+\mathrm{V}^2)(\mathrm{T}'^2+\mathrm{U}'^2+\mathrm{V}'^2)};$$

en prenant donc

$$p^2=\frac{(\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2+\mathrm{R}^2)(\mathrm{T}^2+\mathrm{U}^2+\mathrm{V}^2)}{m},$$

on obtient

$$p^2p'^2[(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2]$$
$$=(x-x_1)^2+(y-y')^2+(z-z_1)^2.$$

Ainsi, on a satisfait à l'identité, et le problème est résolu; mais on peut encore exprimer p, ξ, η, ζ en fonction *explicite* de x, y, z.

Commençons par p: on a

$$(\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2+\mathrm{R}^2)(\mathrm{T}^2+\mathrm{U}^2+\mathrm{V}^2)$$
$$=(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2)\left[\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2+\mathrm{R}^2+\frac{2m(\mathrm{AP}+\mathrm{BQ}+\mathrm{CR})+m^2}{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}\right],$$

$$\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2+\mathrm{R}^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,$$
$$(\mathrm{A}a+\mathrm{B}a'+\mathrm{C}a'')^2+(\mathrm{A}b+\mathrm{B}b'+\mathrm{C}b'')^2$$
$$+(\mathrm{A}c+\mathrm{B}c'+\mathrm{C}c'')^2=\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2,$$

$$2m[\mathrm{AP}+\mathrm{BQ}+\mathrm{CR}]$$
$$=2m\left[\begin{array}{r}(x-x_0)(\mathrm{A}a+\mathrm{B}a'+\mathrm{C}a'')+(y-y_0)(\mathrm{A}b+\mathrm{B}b'+\mathrm{C}b'')\\ +(z-z_0)(\mathrm{A}c+\mathrm{B}c'+\mathrm{C}c'')\end{array}\right]$$

Posant

$$x_1 = x_0 - m\frac{(Aa + Ba' + Ca'')}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$y_1 = y_0 - m\frac{(Ab + Bb' + Cb'')}{A^2 + B^2 + C^2},$$

$$z_1 = z_0 - m\frac{(Ac + Bc' + Oc'')}{A^2 + B^2 + C^2},$$

on obtient

$$mp^2 = (A^2 + B^2 + C^2)[(x - x_1)^2 + (y + y_1)^2 + (z - z_1)^2];$$

ainsi p est exprimé explicitement en fonction quadratique de x, y, z, et l'on voit que p est proportionnel à la distance du point variable (x, y, z) au point fixe (x_1, y_1, z_1).

Passant aux fonctions ξ, η, ζ, on a, en remplaçant T, U, V par leurs valeurs,

$$\xi - \xi_0 = \frac{A(P^2 + Q^2 + R^2) + mP}{mp^2}$$

$$= \frac{A(P^2 + Q^2 + R^2) + mP}{(A^2 + B^2 + C^2)(P^2 + Q^2 + R^2) + 2m(AP + BQ + CR) + m^2}$$

$$= \frac{A}{A^2 + B^2 + C^2} + \frac{X}{p^2},$$

où X est une fonction linéaire en x, y, z.

Posons

$$\xi^0 = \xi_0 + \frac{A}{A^2 + B^2 + C^2};$$

on a

$$\xi - \xi^0 = \frac{X}{p^2};$$

de même

$$\eta - \eta^0 = \frac{Y}{p^2}, \quad \zeta - \zeta^0 = \frac{Z}{p^2}.$$

Ainsi, ξ, η, ζ sont données explicitement en fonction linéaire de x, y, z divisée par une fonction quadratique. On peut parvenir aux trois fonctions X, Y, Z d'une manière simple. Si l'on suppose que l'une des variables x, y, z devienne infinie, alors $\frac{X}{p^2}$ s'annule, et, dans ce cas,

$$\xi = \xi^0,\quad \eta = \eta^0,\quad \zeta = \zeta^0,\quad \text{et}\quad \frac{p}{x^2+y^2+z^2} = \frac{A^2+B^2+C^2}{m};$$

l'identité devient, dans cette même hypothèse,

$$(\xi'-\xi^0)^2 + (\eta'-\eta^0)^2 + (\zeta'-\zeta^0)^2 = \frac{m}{p'^2(A^2+B^2+C^2)},$$

ou, en ôtant les accents,

$$\begin{aligned}(\xi-\xi^0)^2 + (\eta-\eta^0)^2 + (\zeta-\zeta^0)^2 &= \frac{m}{p^2(A^2+B^2+C^2)}\\ &= \frac{X^2+Y^2+Z^2}{p^4}:\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}X^2+Y^2+Z^2 &= \frac{mp^2}{A^2+B^2+C^2}\\ &= (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2.\end{aligned}$$

Opérant sur cette équation, comme ci-dessus sur l'équation analogue

$$P^2+Q^2+R^2 = m(x^2+y^2+z^2),$$

on trouve

$$\begin{aligned}X &= \alpha\,(x-x_1) + \beta\,(y-y_1) + \gamma\,(z-z_1),\\ Y &= \alpha'(x-x_1) + \beta'(y-y_1) + \gamma'(z-z_1),\\ Z &= \alpha''(x-x_1) + \beta''(y-y_1) + \gamma''(z-z_1).\end{aligned}$$

Entre les α, β, γ existent les mêmes relations que ci-dessus entre les a, b, c; de plus,

$$\xi - \xi^0 = \frac{nX}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad \eta - \eta^0 = \frac{nY}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

$$\zeta - \zeta^0 = \frac{nZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \qquad p^2 = \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{n},$$

où

$$n = \frac{m}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Cette belle manière de trouver les quatre formes f, F, φ, ψ subsiste encore lorsqu'au lieu de trois variables, qui suffisent aux applications géométriques, on en a un nombre quelconque.

De même qu'on a calculé ξ, η, ζ en fonction de x, y, z, on peut, inversement, calculer x, y, z en fonction de ξ, η, ζ. Il suffit de faire

$$p = \frac{1}{q}, \quad p' = \frac{1}{q'},$$

et l'identité (1) devient

$$[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]\, q^2 q'^2$$
$$= (\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2;$$

ainsi la forme de l'identité n'est pas changée, et en suivant la même marche que ci-dessus, on en déduira x, y, z en fonction de ξ, η, ζ.

Interprétation géométrique; rayons vecteurs réciproques.

2. Considérons x, y, z comme les coordonnées rectangulaires d'un point m; et ξ, η, ζ comme les coordonnées rectangulaires d'un point μ, l'origine et les axes étant les mêmes pour les deux points. Transportons l'ori-

gine au point qui a pour cordonnées x_1, y_1, z_1, nous aurons

$$X = \alpha x + \beta y + \gamma z, \quad Y = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z,$$
$$Z = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z \text{ (\textit{voir} ci-dessus)};$$

à raison des relations qui subsistent entre les α, β, γ, on peut prendre ces quantités pour les cosinus des angles que font de nouveaux axes rectangulaires avec les anciens, et X, Y, Z sont les coordonnées du point m relativement à ces nouveaux axes. Transportons ces axes parallèlement à eux-mêmes au point O dont les coordonnées sont ζ^0, η^0, ξ^0, nous aurons

$$\xi = \frac{nx}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \eta = \frac{ny}{x^2 - y^2 + z^2}, \quad \zeta = \frac{ny}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$\xi, \eta, \zeta, x, y, z$ étant les coordonnées de μ et de m, dans cette dernière position des axes; on a aussi

$$x = \frac{n\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad y = \frac{n\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad z = \frac{n\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$
$$(x^2 + y^2 + z^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = n^2,$$
$$[(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2] \frac{[x^2 + y^2 + z^2][x'^2 + y'^2 + z'^2]}{n^2}$$
$$= (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

prenant

$$p^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{n^2},$$

l'identité (1) est satisfaite.

De là on conclut que : 1° les trois points O, m, μ sont en ligne droite; 2° $Om.\,O\mu = n^2$.

Les points n, μ sont dits *points réciproques*, et les rayons Om, $O\mu$, rayons *vecteurs* réciproques. Ainsi, la géométrie suffit pour résoudre le problème (1), pourvu que le nombre de variables ne dépasse pas trois; mais, comme nous avons dit, la belle analyse de M. Liouville s'étend à un nombre quelconque de variables : l'identité (1) peut s'écrire

$$\Delta pp' = \mathrm{D}$$

où

$$\Delta^2 = (\zeta - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2,$$
$$\mathrm{D}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Δ est la distance de deux points M, M', D la distance des deux points réciproques μ, μ'; p et p' sont les rayons vecteurs $\mathrm{O}\mu$, $\mathrm{O}\mu'$.

Étant donnée l'équation polaire d'une surface ou d'une ligne, on trouve la surface ou la ligne réciproque en remplaçant le rayon vecteur ρ par $\frac{\mathrm{K}^2}{\rho}$, où K est une constante donnée, et l'équation

$$\Delta pp' = \mathrm{D}$$

transporte les relations métriques de la première surface ou ligne à la surface ou à la ligne réciproque.

Prenons un triangle infinitésimal M M' M''; dans le triangle infinitésimal réciproque $\mu\,\mu'\,\mu''$, les trois rayons vecteurs $\mathrm{O}\mu$, $\mathrm{O}\mu'$, $\mathrm{O}\mu''$ sont différentiellement égaux; on a donc

$$\frac{\mu\mu'}{\mathrm{MM}'} = \frac{\mu\mu''}{\mathrm{MM}''} = \frac{\mu'\mu''}{\mathrm{M'M''}} = p^2.$$

Ainsi, les deux triangles sont semblables, et, par conséquent, équiangles. De sorte que, si deux lignes se coupent sous un certain angle, les lignes réciproques se coupent sous le même angle.

3. (*) Soient une surface algébrique S de degré n; M un

(*) Ce qui suit n'est pas dans le Mémoire cité.

point de cette surface ; O l'origine des coordonnées que nous supposons rectangulaires. Prenant sur le rayon vecteur OM, dans le sens de OM, une longueur $O\mu$ telle, que l'on ait $OM . O\mu = K^2 =$ constante, le lieu du point μ est la surface Σ, réciproque de S ; Σ est, généralement parlant, de degré $2n$, tandis que S, réciproque de Σ, n'est que de degré n. Lorsque le pôle O est sur la surface S, le point correspondant dans Σ est à l'infini, les termes de degré $2n$ disparaissent dans Σ qui n'est plus que du degré $2n - 1$; autant une surface S a de nappes infinies, autant la réciproque a de nappes qui passent par le pôle, et autant une ligne a de branches infinies, autant la réciproque a de branches qui passent par le pôle ; à chaque valeur de K^2 correspond une surface Σ. Toutes ces surfaces sont évidemment *homothètes*, et, par conséquent, les plans tangents à ces surfaces menés par des points situés sur le même rayon, sont parallèles. Pour $K^2 = 0$, la surface Σ se transporte à l'infini, et pour $K^2 = \infty$, la surface Σ se réduit au pôle O. En prenant K^2 négativement, les surfaces Σ sont les symétriques relativement au pôle de celles qui répondent à K^2 pris positivement.

4. Prenons pour S une sphère et pour K^2 la *puissance* du pôle O relativement à cette sphère ; il est évident que le point μ réciproque à M est sur la même sphère S, donc la surface Σ se confond avec S : les plans tangents en M et μ sont également inclinés sur le rayon vecteur $O\mu M$, mais en *sens inverse ;* ils sont *antiparallèles* relativement à ce rayon. Faisant varier K^2, les diverses surfaces Σ étant *homothètes* sont toujours des sphères. Si le pôle O est sur la sphère S, le degré de Σ est diminué d'une unité et devient un plan perpendiculaire au rayon de la sphère S qui passe par O.

Soit K^2 égal à la puissance du point O relativement à la sphère S ; prenons sur cette sphère S trois points

M, M', M'', et leurs réciproques μ, μ', μ'' : les quatre points M, M', μ, μ' sont sur un même petit cercle; les quatre points M, M'', μ, μ'' sont sur un autre petit cercle; l'angle M' M M'', formé par les arcs MM', MM'', est évidemment égal à l'angle $\mu' \mu \mu''$; et à cause des propriétés homothétiques, ceci a également lieu pour des valeurs quelconques de K.

5. Deux sphères S, s se coupant suivant un petit cercle, les sphères réciproques Σ, σ se coupent aussi suivant un petit cercle, réciproque du premier; donc la ligne réciproque d'un cercle est un cercle, et l'angle suivant lequel se coupent les sphères Σ, σ est égal à l'angle suivant lequel se coupent les sphères S, s: c'est une conséquence de l'*antiparallélisme* (4). Les cercles réciproques forment le même angle que les cercles directs; de là découlent les propriétés de la projection stéréographique.

6. Soient M un point commun à deux surfaces quelconques S, s, μ le point correspondant dans les surfaces réciproques Σ, σ; au point μ les deux surfaces Σ, σ se coupent suivant le même angle que les surfaces S, s au point M: cela devient évident en plaçant une sphère touchant la surface S, et une autre sphère touchant la surface s au même point M. De même, si S, s représentent des lignes quelconques.

7. Il suit du paragraphe précédent, qu'un système de surfaces étant coupé par une surface trajectrice, partout sous le même angle, la réciproque de la surface trajectrice sera trajectrice du système réciproque; lorsque l'angle est nul, la surface trajectrice devient une enveloppe; de même pour des lignes. De là découlent de nombreuses, curieuses et importantes conséquences sur les lignes loxodromiques, de courbure, etc. C'est ainsi que l'on transforme un polygone rectiligne plan en un poly-

gone circulaire plan, où la somme des angles ne dépend que du nombre des côtés (théorème de M. Miquel).

8. Supposons dans un même plan une droite et un cercle, le centre du cercle étant pris pour pôle et son rayon pour la constante K, la réciproque de la droite est un second cercle, *image* de la droite dans le premier cercle considéré comme ligne réfléchissante; et la droite est aussi l'image du second cercle par rapport à cette ligne miroitante. C'est cette propriété optique qui a porté un géomètre éminent, M. William Thomson (*), à désigner ce système métamorphique sous le nom de principe *des images* (*Journal de Mathématiques*, tome X, p. 364); depuis, M. Liouville a généralisé ce principe et l'a désigné sous le nom de *rayons vecteurs réciproques*, qui caractérise la condition géométrique.

9. M. William Roberts a fait voir que, pour les courbes planes, la similitude des triangles infinitésimaux subsiste encore pour des transformations autres que celles qui sont fondées sur le principe des images (*Journal de Mathématiques*, tome X, page 209; 1848). Étant donnée l'équation polaire d'une courbe plane en r et ω: remplaçant r par R^n et ω par $n\omega$, où r est un nombre quelconque positif ou négatif, réel ou imaginaire, on a

$$r\frac{d\omega}{dr} = \frac{R\,d\Omega}{dR}.$$

Or, $\frac{r\,d\omega}{dr}$ est la tangente de l'angle que forme la tangente à la courbe avec le rayon vecteur; donc, etc.

A l'aide de ce principe si simple, l'ingénieux professeur démontre avec une extrême facilité une foule de pro-

(*) Depuis 1846, rédacteur de l'excellent recueil *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*. Le format in-8 ne semble pas commode pour des ouvrages destinés à renfermer de longues formules, des calculs étendus.

priétés. Citons-en deux. L'auteur nomme *tangente hyperbolique* à une conique, une hyperbole *équilatère*, tangente à la conique en un point et concentrique à la conique. Cette définition admise, on a ce théorème :

THÉORÈME. *Étant données deux ellipses homofocales; si, par un point de l'ellipse extérieure, on mène deux tangentes hyperboliques à l'ellipse intérieure, ces tangentes sont également inclinées sur l'ellipse extérieure.* Même théorème pour des tangentes rectilignes.

THÉORÈME. *Le lieu du sommet d'un point dont le produit des distances aux n sommets d'un polygone régulier est constant, est représenté, comme on sait, par l'équation polaire*

$$r^{2n} - 2a^n r^n \cos n\omega + a^{2n} = b^{2n} \text{ (*)}.$$

a est la distance du cercle circonscrit et b un paramètre variable; les trajectoires orthogonales sont données par l'équation

$$r^n \cos n(\omega - \theta) = a^n \cos n\theta,$$

où θ est un paramètre variable. C'est le lieu d'un point tel que le produit de ses distances aux n sommets d'un polygone régulier est égal à la $n^{ième}$ puissance de la distance de ce point au centre du polygone régulier. Voir aussi plusieurs beaux résultats du même géomètre (*Nouvelles Annales*, tome IX, pages 11, 142, 182, 309, 321, et tome XI, page 182.)

9. Nous joignons ici, comme exercice de calcul infinitésimal, quelques résultats donnés dans le Mémoire de M. Thomson, et qu'on rencontre fréquemment dans la théorie attractionnelle et dans celle des fluides impondérés.

(*) *Nouvelles Annales*, VANNSON, t. VI, p. 91.

1°. On a

$$\frac{1}{p} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{d\left(\frac{1}{p}\right)}{dx} = \frac{-dp}{p^2\,dx};$$

$$\frac{d^2\frac{1}{p}}{dx^2} = -\frac{1}{p^2}\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{2\left(\frac{dp}{dx}\right)}{p^3};$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{x}{p}, \quad \frac{d^2p}{dx^2} = \frac{1}{p} - \frac{x^2}{p^3};$$

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{p}\right)}{dx^2} = -\frac{1}{p^3} + \frac{3x^2}{p^5};$$

de même

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{p}\right)}{dy^2} = -\frac{1}{p^3} + \frac{3y^2}{p^5}, \qquad \frac{d^2\left(\frac{1}{p}\right)}{dz^2} = -\frac{1}{p^3} + \frac{3z^2}{p^5};$$

ainsi

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{p}\right)}{dx^2} + \frac{d^2\left(\frac{1}{p}\right)}{dy^2} + \frac{d^2\left(\frac{1}{p}\right)}{dz^2} = 0.$$

2°. On a

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad z = \frac{\zeta}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

$$\frac{dx}{d\xi} = y^2 + z^2 - x^2, \quad \frac{dy}{d\xi} = -2xy, \quad \frac{dz}{d\xi} = -2xz,$$

$$\frac{dx}{d\eta} = -2xy, \quad \frac{dy}{d\eta} = x^2 + z^2 - y^2, \quad \frac{dz}{d\eta} = -2yz,$$

$$\frac{dx}{d\zeta} = -2xz, \quad \frac{dy}{d\zeta} = -2yz, \quad \frac{dz}{d\zeta} = x^2 + y^2 - z^2.$$

Supposons $U = (\xi, \eta, \zeta)$; les crochets désignant une fonction des variables qu'ils renferment, on a donc aussi

$U = (x, y, z)$, donc

$$\frac{dU}{d\xi} = \frac{dU}{dx}(y^2 + z^2 - x^2) - 2\frac{dU}{dy}xy - 2\frac{dU}{dz}xz,$$

$$\frac{dU}{d\eta} = -2\frac{dU}{dx}xy + \frac{dU}{dy}(x^2 + z^2 - y^2) - 2\frac{dU}{dz}yz,$$

$$\frac{dU}{d\zeta} = -2\frac{dU}{dx}xz - 2\frac{dU}{dy}yz + \frac{dU}{dz}(x^2 + y^2 - z^2);$$

donc

$$\left(\frac{dU}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dU}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dU}{d\zeta}\right)^2$$
$$= p^4\left[\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dU}{dz}\right)^2\right].$$

(*Journal de Mathématiques*, tome XII, page 290.)

Les coefficients différentiels expriment ici des différences partielles.

3°. Cherchons à transformer $\frac{d^2U}{d\xi^2} + \frac{d^2U}{d\eta^2} + \frac{d^2U}{d\zeta^2}$ en différences partielles relatives aux variables x, y, z. Différentiant la première des trois équations ci-dessus par rapport à ξ, et n'ayant égard qu'aux U, on a

$$\frac{d^2U}{dx^2}[(y^2 + z^2 - x^2)^2 + 4y^2x^2 + 4z^2x^2] = p^4\frac{d^2U}{dx^2};$$

donc, pour les trois équations,

$$p^4\left[\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2}\right].$$

Ayons maintenant égard aux x, y, z.

Ne prenant que ce qui multiplie $\frac{dU}{dx}$, on a

$$\frac{d(y^2 + z^2 - x^2)}{d\xi} - 2\frac{d.xy}{d\eta} - 2\frac{d.xz}{d\zeta};$$

effectuant, et considérant que

$$\frac{dx}{d\zeta} = \frac{dz}{d\xi}, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{dx}{d\eta},$$

on trouve

$$-2p^2x\frac{dU}{dx} = -2p^3\frac{dp}{dx}\frac{dU}{dx},$$

car,

$$\frac{dp}{dx} = \frac{x}{p};$$

et de même, on a, pour $\frac{dU}{dy}$ et $\frac{dU}{dz}$,

$$-2p^3\frac{dp}{dy}\frac{dU}{dy}, \quad -2p^3\frac{dp}{dz}\frac{dU}{dz}.$$

Les coefficients des autres différences partielles telles que $\frac{d^2U}{dx\,dy}$, $\frac{d^2U}{dx\,dz}$, etc., s'annulent, et l'on a pour transformée

$$p^4\left[\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2}\right]$$
$$-2p^3\left[\frac{dp}{dx}\frac{dU}{dx} + \frac{dp}{dy}\frac{dU}{dy} + \frac{dp}{dz}\frac{dU}{dz}\right].$$

Faisant

$$p = \frac{1}{q},$$

on obtient

$$\frac{d^2.qU}{dx^2} + \frac{d^2.qU}{dy^2} + \frac{d^2.qU}{dz^2} = 2\left(\frac{dq}{dx}\frac{dU}{dx} + \frac{dq}{dy}\frac{dU}{dy} + \frac{dq}{dz}\frac{dU}{dz}\right)$$
$$+ q\left[\frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} + \frac{d^2U}{dz^2}\right];$$

car

$$\frac{d^2q}{dx^2} + \frac{d^2q}{dy^2} + \frac{d^2q}{dz^2} = 0,$$

comme on a vu ci-dessus; donc

$$\frac{d^2 U}{d\xi^2} + \frac{d^2 U}{d\eta^2} + \frac{d^2 U}{d\zeta^2}$$
$$= p^5 \left[\frac{d^2 p^{-1} U}{dx^2} + \frac{d^2 p^{-1} U}{dy^2} + \frac{d^2 p^{-1} U}{dz^2} \right].$$

(*Journal de Mathématiques*, tome XII, page 289.)

Pour la méthode générale de ces transformations, il faut étudier le beau Mémoire de M. Liouville sur les équations de la Dynamique (tome XIV, page 268; 1849).

4. Lorsque le paramètre K^2 (page 237) devient égal à -1, on a les surfaces que M. A. Bravais nomme *inverses* (*Journal de Mathématiques*, tome XIV, page 137; 1849) et sur lesquelles il donne des théorèmes qu'il suffit d'énoncer.

Théorème I. *Lorsque le pôle de symétrie de la surface fixe* P *se déplace, la surface inverse* p *se change en un nouvel inverse* p' *et l'on peut toujours transporter* p *sur* p' *par un mouvement de translation commun à tous les points de la surface* p.

Théorème II. *Si l'on fait tourner de deux angles droits la surface* p *inverse de* P *autour d'une droite passant par le pôle de symétrie* C, *la surface* p' *ainsi obtenue sera la symétrique de* P *par rapport au plan mené par* C *normalement à l'axe de rotation.*

M. Bravais ne considère que des polyèdres. Du reste, ces théorèmes ont aussi occupé Jacobi. (Crelle, tome XV, page 309; 1836.)

Lorsqu'une surface se confond avec son inverse, le pôle de symétrie prend le nom de centre de figure de la surface.

5. L'équation de la podaire d'une ligne plane donnée de degré n est de degré $2n$; et lorsque le point est sur la

courbe, la réciproque de cette podaire est de degré $2n-2$; dans une conique, la réciproque de la podaire du centre est encore une conique; de même pour les surfaces du second ordre.

6. Soient trois cercles A, B, C situés sur un même plan ou sur une même sphère; P un point commun aux deux cercles A et B. Prenons ce point pour pôle et faisons K^2 égal à la *puissance* de P par rapport au cercle C; les réciproques des cercles A et B sont deux droites (page 237), et le cercle C se confond avec sa réciproque. Menons un cercle tangent aux deux droites et au cercle C; la réciproque de ce cercle, conservant toujours le même point P et la même valeur K^2, sera un cercle tangent aux trois cercles A, B, C.

En augmentant les trois rayons des trois cercles de la même longueur sans changer les centres, on peut toujours faire que deux cercles se coupent. Le centre du cercle touchant les trois ne changera pas. Ainsi le problème de Viète est ramené à celui d'un cercle touchant deux droites et un cercle, et le problème de Fermat à celui d'une sphère touchant trois plans et une sphère.

THÉORÈMES D'EISENSTEIN SUR LES SÉRIES QUI SONT LES DÉVELOPPEMENTS DE FONCTIONS ALGÉBRIQUES;

DÉMONTRÉS PAR M. HEINE,

Professeur à Bonn.

(Journal de M. Crelle, t. XLV, p. 285; 1853.)

---

1. *Lemme.* g et h étant deux nombres donnés, *premiers entre eux*, p un nombre *premier* donné, n un

nombre *entier* donné, les racines de la congruence

$$g - hx = (\dot{p}^n),$$

sont comprises entre 0 et $p^n - 1$; p^n, $2p^n - 1$; $2p^n$, $3p^n - 1$, etc.

Observation. Le point Leibnitzien placé sur une lettre indique un multiple.

2. *Lemme.* m étant un nombre entier, $m!$ un produit continuel et p un nombre *premier*, faisons

$$m = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3 + \ldots + a_r p^r,$$

les a sont des nombres positifs tous moindres que p et pouvant être nuls; posons

$$\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_r &= A_1,\\
a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_r &= A_2,\\
a_3 + a_4 + \ldots\ldots\ldots + a_r &= A_3,\\
&\vdots\\
a_{r-1} + a_r &= A_{r-1},\\
a_r &= A_r;
\end{aligned}$$

et faisons

$$A_1 + A_2 p + A_3 p^2 + \ldots + A_{r-1} p^{r-2} + A_r p^{r-1} = B,$$

alors B est la plus haute puissance de p qui divise le produit continuel $m!$ (Legendre, *Théorie des nombres*, tome I, page 10.)

Observation. Il est évident que a_0, a_1, a_2, etc., sont les chiffres avec lesquels on écrirait le nombre m dans le système de numération dont la base est p.

3. *Lemme.* g et h étant deux nombres *premiers entre eux*; m un nombre entier; si l'on simplifie, autant que possible, le coefficient binomial

$$\frac{g(g-h)(g-2h)\ldots[g-(m-1)h]}{m!},$$

le dénominateur de la fraction ainsi simplifiée ne renferme plus aucun facteur *premier non diviseur* de h, mais uniquement des diviseurs de h.

Démonstration. Si $m!$ renferme avant la simplification un diviseur de h, il ne peut s'en aller par cette opération, car, g et h étant *premiers entre eux,* un tel diviseur ne peut diviser aucun facteur du numérateur. Soit donc p un *nombre premier non diviseur* de h, et supposons que p^n se trouve au dénominateur comme facteur. Partageons le numérateur en groupes, renfermant chacun p^n facteurs successifs. Dans le dernier groupe, il pourra se trouver moins de p^n facteurs. Chaque groupe (le dernier excepté), renfermera un nombre divisible par p^n (lemme 1); soit s le nombre de ces groupes. Le numérateur est donc divisible par p^{ns} ou bien par p^{ns+n} si le dernier groupe renferme ainsi un nombre divisible par p^n; opérant de même sur le dénominateur; le premier groupe est $1, 2, 3, \ldots, p^n$ et le deuxième p^n+1, $p^n+2, \ldots$, p^n+2p^n, etc., le dernier groupe, s'il est incomplet, ne peut pas renfermer un diviseur de p^n; donc, après les simplifications, le numérateur renferme au plus p^n comme facteur et le dénominateur aucun facteur divisible par p^n.

C. Q. F. D.

4. Théorème. *Dans le développement de* $(1+x)^{\frac{g}{h}}$, *suivant les puissances croissantes de x, g et h étant des nombres premiers entre eux, les dénominateurs des coefficients, simplification faite, ne contiennent que des facteurs diviseurs de h.*

Démonstration. C'est une conséquence du lemme précédent; le coefficient binomial affecte $\left(\frac{x}{h}\right)^m$.

Observation. $\frac{g}{h}$ peut être négatif: la conclusion reste la même.

5. Théorème. *a_0, a_1, a_2,..., a_m étant des nombres rationnels; si l'on développe suivant les puissances croissantes de x l'expression $(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots a_m x^m)^{\frac{g}{h}}$, où g et h sont des nombres premiers entre eux, chaque coefficient simplifié est le quotient de deux nombres entiers; le dénominateur est un produit formé par des puissances de h, des puissances des dénominateurs de a_1, a_2,..., a_m et des puissances des numérateurs de a_0.*

Démonstration.

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m)^{\frac{g}{h}}$$

$$= (a^0)^{\frac{g}{h}} \left[1 + \frac{a_1}{a_0} x + \frac{a_2}{a_0} x^2 + \ldots + \frac{a_m}{a_0} x^m \right]^{\frac{g}{h}}.$$

Chaque coefficient renferme : 1° les coefficients binomiaux; 2° des puissances positives de a_1, a_2,..., a_m; 3° des puissanees négatives de a_0; done, etc.

Observation. Les dénominateurs renferment donc des puissances d'un nombre *limité* de certains nombres entiers. Il est donc toujours possible de remplacer x par un multiple kx tel, que tous les coefficients deviennent des nombres entiers.

6. Théorème. *Si une fonction algébrique d'une variable x peut se développer suivant les puissances croissantes de cette variable, alors les coefficients étant simplifiés peuvent être représentés par des fractions dont les dénominateurs sont des produits de puissance d'un nombre limité de nombres entiers.*

Démonstration. L'addition, la soustraction et la multiplication de deux séries ou de deux fonctions entières n'introduisent pas de nouveaux nombres premiers dans les dénominateurs; l'élévation à une puissance positive ou négative d'une fonction ordonnée suivant les puissances de x n'introduit dans les dénominateurs qu'un nombre *limité* de nombres premiers (5); or toute fonction algébrique d'une variable x est le résultat d'un certain nombre desdites opérations; donc, etc.

Observation. On ne parle pas de la division, car elle équivaut à l'élévation à la puissance — 1.

IRRATIONNELS.

7. *Définitions.* Un nombre *irrationnel* résulte des quatre opérations et de l'élévation à des puissances fractionnaires positives, faites sur des nombres rationnels *entiers*.

Nous appelons *irrationnel entier*, lorsque la division n'est pas indiquée. *Exemple :*

$\sqrt[3]{3+\sqrt{7}}$ est un *irrationnel entier.*

Observation. Un nombre irrationnel quelconque peut se ramener à la forme d'une fraction dont les deux termes sont des *irrationnels entiers*. Exemple :

$$\sqrt{1-\sqrt{\frac{2}{3}}}=\frac{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{3}},$$

$\sqrt{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}$ est le numérateur entier et $\sqrt[4]{3}$ le dénominateur entier. Un *irrationnel entier* est dit divisible par un *deuxième irrationnel entier* lorsqu'il existe un troisième irrationnel entier qui, multiplié par le deuxième, reproduise le premier.

Observation. Lorsqu'on élève un nombre irrationnel entier à une puissance positive, le résultat est un irrationnel entier; de même lorsqu'on combine deux irrationnels entiers par voie d'addition, soustraction et multiplication.

8. Ces définitions admises, le théorème 6 subsiste même lorsque les a sont des nombres *irrationnels entiers*. Toutefois, il faut encore démontrer que lorsque, par combinaisons de quatre opérations, on obtient des irrationnels qui, en se simplifiant, deviennent rationnels, ces simplifications n'amènent pas aux dénominateurs des facteurs premiers en nombre *illimité*. M. Heine donne cette démonstration qui repose sur la classification *abélienne* des irrationnels; classification trop peu connue pour que nous puissions donner cette belle démonstration (*).

ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES.

9. Soit

$$f(x, y) = 0$$

une équation algébrique en x, y; si les coefficients sont irrationnels, on peut toujours la ramener à une autre équation où les coefficients sont rationnels et entiers. L'équation peut alors se mettre sous la forme

$$(1)\quad f(x, y) = A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + \ldots + A_{m-1} y + A_m = 0,$$

les A sont des fonctions entières à coefficients entiers de x; soient $a_0, a_1, \ldots, a_m$ les valeurs de ces diverses fonctions A en y faisant $x = 0$, valeurs qui sont des nombres entiers, ainsi :

$$(2)\quad f(0, y) = a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + a_2 y^{m-2} \ldots a_{m-1} y + a_m,$$

l'équation (1) résolue par rapport à y, donne m racines, chacune fonction de x; supposons qu'une de ces racines, que nous désignons par y_1, puisse se développer suivant des puissances croissantes de x, à coefficients rationnels, de

(*) On trouvera cette classification dans la nouvelle édition de l'*Algèbre supérieure*.

sorte que

(3) $$y_1 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

les c sont des nombres rationnels en nombre infini.

10. THÉORÈME. *Les dénominateurs des nombres c_0, c_1, etc., ne renferment qu'un nombre limité de diviseurs premiers.*

Démonstration. Faisons

$$x = 0,$$

nous aurons

$$y_1 = c_0;$$

donc, d'après l'équation (2),

(4) $$f(y_1, 0) = a_0 c_0^m + a_1 c_0^{m-1} + \ldots + a_m = 0.$$

Substituant la valeur de y_1 dans l'équation (1), on a

$$\left.\begin{array}{l} f(x, y_1) = \mathrm{A}_0 (c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots)^m \\ \quad + \mathrm{A}_1 (c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots)^{m-1} \\ \quad \vdots \\ \quad + \mathrm{A}_{m-1} (c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots) \\ \quad + \mathrm{A}_m \end{array}\right\} = 0,$$

comme c'est une identité, les coefficients des puissances de x doivent s'anéantir. Supposons n plus grand que le degré de x dans A_m; alors le coefficient de x^n renferme deux parties :

1re partie. $c_n \left[m a_0 c_0^{m-1} + m - 1 \,.\, a_1 c_0^{m-2} + \ldots 2 a_{m-2} c_0 + a_{m-1} \right]$,

car A_m ne fournit rien;

2e partie. Les termes fournis par les divers A combinés avec les c depuis c_0 jusqu'à c_{n-1}.

Supposons que le nombre premier p paraisse pour la *première fois* dans le dénominateur de c_n; la somme des deux parties devant être nulle, la deuxième partie ne peut pas renfermer p au dénominateur, car elle ne contient pas de c_n; il s'ensuit que p doit aussi disparaître dans la première partie, donc p doit diviser

$$ma_0\, c_0^{m-1} + m - 1 \,.\, a_1\, c_0^{m-2} \ldots\ldots a_{m-1}.$$

Or cette expression est la dérivée de l'équation (4). Si donc cette équation n'a pas de racines égales, la dérivée n'est pas nulle et a une valeur finie; donc tous les facteurs premiers qu'on rencontre dans les dénominateurs à partir de c_n, divisent une même expression finie. Ils sont donc en nombre *limité*. Il faut y joindre les diviseurs qui sont fournis par les dénominateurs qui précèdent c_n et qui sont évidemment en nombre limité; donc les dénominateurs en nombre infini c_0, c_1, etc., étant simplifiés, ne renferment qu'un nombre limité de facteurs premiers. C. Q. F. D.

Eisenstein dit que, lorsque l'équation (4) a des racines égales, le développement en séries suivant des puissances croissantes de x est impossible. M. Heine fait voir que cette assertion n'est pas exacte et que le théorème subsiste encore lorsque l'équation (4) a des racines égales.

11. Il s'ensuit que toute série ordonnée suivant les puissances croissantes de x qui renferme dans les dénominateurs un nombre indéfini de facteurs premiers, ne saurait être ni le développement d'une fonction algébrique, ni même la racine d'une équation algébrique; or, $\log x$, $\operatorname{arc\,tang} x$, $\sin x$, e^x, etc., se développent en séries, où les dénominateurs renferment un nombre illimité de facteurs premiers; donc ces fonctions ne sont ni algébriques, ni racines d'une fonction algébrique.

Remarque. Une mort prématurée a empêché Eisenstein de donner la démonstration de ces importants théorèmes, surtout en ce qui concerne les équations.

RAPPORT DU DIAMÈTRE A LA CIRCONFÉRENCE, D'APRÈS PTOLÉMÉE.

Ptolémée divise la circonférence en 360 degrés, chaque degré en 60 minutes, etc. Il divise de même le rayon égal à l'unité en 60 parties égales; chacune de ces parties en 60 nommées aussi minutes, etc., et il trouve que la corde de l'arc d'un degré est égale à $\frac{1}{60}+\frac{2}{60^2}+\frac{50}{60^3}$ du rayon, ou $1^\circ\, 2'\, 50''$, et si nous admettons que cet arc ne diffère pas sensiblement de sa corde, l'arc de 60 degrés a donc pour longueur $1+\frac{2}{60}+\frac{50}{60^2}$ du rayon, ou bien $1^\circ\, 2'50''$ du rayon. Donc la demi-circonférence de rayon 1 ou bien la circonférence entière de diamètre 1 est

$$3+\frac{8}{60}+\frac{30}{60^2} \quad \text{ou} \quad 3,8^\circ,30',$$

ou bien

$$3\,\frac{17}{120}=3,141\,666\ldots$$

tel est le π de Ptolémée,

$$3\,\frac{17}{120}=\frac{377}{120}=\frac{355+22}{113+7}.$$

On obtient donc le rapport de Ptolémée en ajoutant terme à terme le rapport d'Archimède à celui d'Adrien Metius. le rapport de Ptolémée est compris entre eux.

Mais Ptolémée ne s'occupe pas de π; son but est de calculer une Table des cordes qu'il donne, en procédant par demi-degré, depuis 30 minutes jusqu'à 180 degrés; il y ajoute une Table des trentièmes des différences successives entre les cordes. A cet effet, il calcule d'abord, par la construction connue, les côtés du décagone et du pentagone :

$$\text{corde de } 36^\circ = 37' \, 4'' \, 55''',$$
$$\text{corde de } 72^\circ = 110^\circ \, 32' \, 0'' \, 56''';$$

puis il établit le théorème connu sur la relation entre les diagonales et les côtés du quadrilatère inscrit, et part de ce théorème pour trouver d'abord la corde de la différence, et ensuite la corde de la somme des deux arcs dont on connaît les cordes respectives et aussi pour calculer la corde de la moitié d'un arc. Ainsi, au moyen de la corde de 72 et de 60 degrés, il trouve la corde 12 degrés, et, de là, par des bissections successives, il parvient à trouver

$$\text{corde } 1^\circ \, 30' = 1^\circ \, 34' \, 15'',$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{1}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{15}{60^3}\right) \text{rayon};$$

puis il démontre que, lorsque l'arc b est plus grand que l'arc a, on a l'inégalité

$$\frac{\text{corde } b}{\text{corde } a} < \frac{b}{a},$$

et il a besoin de ce théorème pour trouver par approximation la corde de 30 minutes ou $\frac{1}{2}$ degré; il procède ainsi :

$$\text{la corde de } 45' = \frac{1}{2} \text{ corde } 1^\circ \, 30' = \text{corde } \frac{3}{4} \text{ de degré} = 0^\circ \, 47' \, 8''.$$

Or

$$\frac{\text{corde } \frac{3^\circ}{2}}{\text{corde } 1^\circ} < \frac{3}{2}; \qquad \frac{\text{corde } 1^\circ}{\text{corde } \frac{3^\circ}{4}} < \frac{4}{3};$$

donc

$$\text{corde de } 1^\circ < \frac{4}{3} \text{ corde } \frac{3^\circ}{4},$$

$$\text{corde de } 1^\circ > \frac{2}{3} \text{ corde } \frac{3}{2};$$

ces deux limites étant égales jusqu'aux secondes, on a sensiblement

$$\text{corde } 1^\circ = 1^\circ\, 2'\, 50'' = \left(\frac{1}{60} + \frac{2}{60^2} + \frac{50}{60^3}\right) \text{rayon}.$$

Connaissant la corde de 1 degré, il calcule celle de 30 minutes, et ensuite la Table des cordes qui procède par 30 minutes.

(*Composition mathématique de* CLAUDE PTOLÉMÉE. Traduction de Halma, t. I, liv. 1, p. 36.)

QUESTIONS DU SENATE-HOUSE.

Université de Cambridge

(voir p. 192).

Les examens durent huit jours; les questions des trois premiers jours sont plus faciles que celles des cinq derniers jours; ce qui partage les questions en deux parties. La première catégorie roule sur *Euclide*, l'algèbre, la trigonométrie, les sections coniques, la statique, la dynamique, etc., *Newton*, hydrostatique, optique, astronomie. La seconde catégorie se compose de questions sur Euclide, algèbre, trigonométrie plane, trigonométrie sphérique, théorie des équations, géométrie à deux dimensions, calcul différentiel, calcul intégral, géométrie à trois dimensions, équations différentielles, intégrales définies, calculs aux différences finies, statique, dynamique d'une molécule, dynamique des solides, hydrostatique, hydrodynamique, optique géométrique, astronomie, mouvement troublé, attractions, optique physique, calcul des variations. Nous publierons les principales questions proposées depuis 1848, et qui font un singulier contraste avec la *nugatoria res* de certains examens. Les questions intitulées *Euclide* sont des problèmes de géométrie résolus par la méthode des *Elementa*, et celles qui sont intitulées *Newton* sont des problèmes de dynamique résolus par la méthode des *Principia*. Car de l'autre côté de la Manche on s'applique avec raison à entretenir la culture de la géométrie pure aussi bien que celle de l'analyse pure. Que veut-on nous faire cultiver de ce côté-ci? L'arithmétique du banquier, la géométrie du propriétaire, la mécanique du maître de forges et l'algèbre de personne, car l'art cossique, que nos ancêtres ont acclamé avec un enthousiasme lyrique, n'est qu'une rêverie inutile pouvant accoutumer l'esprit à s'intéresser à des idées abstraites; accoutumance dangereuse. Les idées concrètes, pratiques, seules sont utiles, profitables, rapportent, et Horace nous dit :

Si res sola potest facere et servare beatum,
Hoc primus repetas opus, hoc postremus omittas.

(Epist. I, VI, 47.)

C'est le pivot du système pédagogique utilitaire.

TEMPS EMPLOYÉ PAR UN CALCULATEUR EXERCÉ POUR FAIRE DIVERSES OPÉRATIONS ARITHMÉTIQUES.

ADDITION.

	Écriture et calcul.	Preuve.	Total.
Deux nombres, chacun de trois chiffres.......	11″	2″	13″
Deux nombres, chacun de sept chiffres.......	24″	5″	29″
Dix nombres de deux à quatre chiffres chacun .	1′ 41″	33″	2′ 14″
Dix nombres, chacun de douze chiffres.......	4′ 26″	1′ 15″	5′ 41″
Vingt nombres, chacun de deux à quatre chiffres.	1′ 42″	26′	2′ 8″
Seize nombres, chacun de un à cinq chiffres et accompagnés de petites fractions..........	2′ 10″	34″	2′ 44″

SOUSTRACTION.

Deux nombres, chacun de trois à sept chiffres..	13″	3″	16″
Deux nombres, chacun de quatorze chiffres....	48″	9″	57″

MULTIPLICATION.

Trois chiffres par deux chiffres.............	13″	4″	17″
Sept chiffres par un chiffre..................	23″	6″	29″
Cinq chiffres par deux chiffres.............	36″	15″	51″
Cinq chiffres par quatre chiffres.............	1′	27″	1′ 27″
Sept chiffres par quatre chiffres.............	1′ 30″	45″	2′ 15″
Huit chiffres par cinq chiffres..............	1′ 41″	58″	2′ 39″
Sept chiffres par six chiffres................	2′ 31″	1′ 20″	3′ 51″
Huit chiffres par sept chiffres............. .. .	3′ 24″	2′ 55″	6′ 29″

DIVISION.

Dividende	Diviseur	Ecriture et calcul.	Preuve.	Total.
Dividende, trois chiffres;	diviseur, deux chiffres.	18″	6″	24″
trois	un	16″	4″	20″
cinq	quatre	42″	18″	1′
cinq	deux	44″	16″	1′
huit	cinq	1′ 35″	54″	2′ 29″
onze	six	2′ 10″	1′ 22″	3′ 32″
quatorze	huit	7′ 19″	6′ 25″	13′ 44″
quatorze	six			
Exemple : 26 938 479 633 168 par 517 245. . . .		4′ 40″	2′ 48″	7′ 28″

Ces nombres sont extraits d'un ouvrage allemand contenant la description d'une machine à calculer, inventée en 1786 par un nommé Muller, capitaine du génie en Hesse-Darmstadt : ce sont des moyennes obtenues sur plusieurs calculateurs exercés et sur un grand nombre d'exemples. Pour de petits nombres, la plume est plus expéditive qu'une machine; mais pour de grands nombres, c'est l'inverse. L'*arithmomètre* de M. Thomas, de Colmar, tel qu'il vient de le perfectionner, est bien l'instrument le plus ingénieux, le plus commode et le plus portatif qu'on connaisse en ce genre. Il est d'une grande utilité pour opérer sur des nombres qui dépassent les bornes des Tables logarithmiques et surtout pour vérifier toute opération sur de grands nombres; d'ailleurs, les additions et les soustractions ne peuvent se faire par les Tables de logarithmes. Leibnitz a recherché une telle machine toute sa vie, et y a dépensé plus de vingt-quatre mille écus.

Les agents inorganiques possèdent l'immense avantage de ne pas se fatiguer.

L'arithmomètre opère la multiplication de 8 chiffres par 8 chiffres en 18 secondes, et la division de 16 chiffres par 8 chiffres en 24 secondes.

La description et le dessin détaillé de la machine se trouvent dans le *Bulletin de la Société d'Encouragement*, année 1851, page 355.

La machine de Leibnitz est décrite dans les *Miscellanea Berolinensis*, 1710.

NOTE SUR UN PROBLÈME D'APPLICATION DE L'ANALYSE A LA GÉOMÉTRIE;

Par M. DIEU.

On demande souvent de déterminer le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point sur les tangentes à une courbe, et même, il y a quelques années, on proposait des cas particuliers assez compliqués dans les examens pour l'École Polytechnique; cette question conduit à une autre qui en est une sorte de réciproque, savoir : *Quelle est la courbe telle, que le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné sur les tangentes soit une courbe donnée?*

On peut résoudre ce problème de deux manières, soit en n'employant que les principes du calcul différentiel (dérivées), soit en faisant usage de ceux du calcul intégral.

1°. Soient A la courbe donnée et P le point donné. Tirons PM de P à un point quelconque M de la courbe A, et élevons à PM, par le point M, une perpendiculaire L; on peut considérer L comme une droite qui se déplace sur le plan, en même temps que M glisse sur la courbe A, avec les deux conditions de passer toujours en M et d'être perpendiculaire à PM; or, on voit facilement ainsi que la courbe cherchée X est l'enveloppe de la droite L.

Il résulte de ce raisonnement que, si l'on est parvenu à la courbe A en résolvant le problème d'abord cité, par rapport à une certaine courbe B et au point P, la solution du problème inverse sera la courbe B; car un même système de droites ne saurait avoir deux enveloppes différentes. Par exemple, lorsque A est une droite, X sera une parabole que cette droite touchera en son sommet, et le point P sera le foyer. Lorsque A est une circonférence, X sera une conique concentrique à cette circonférence, dont le point P sera un des foyers et dont l'axe focal sera égal au diamètre de la circonférence (ellipse, si P est intérieur à la circonférence A; hyperbole, si P est extérieur).

2°. Soient encore

$$(1) \qquad f(\xi, \eta) = 0$$

l'équation de A; α, β les coordonnées de P, et x, y celles du point de la courbe demandée X correspondant au point (ξ, η) de A.

ξ, η, x, y et $y' = \dfrac{dy}{dx}$ doivent satisfaire respectivement à l'équation (1) ainsi qu'aux équations

$$(2) \qquad \eta - y - y'(\xi - x) = 0, \quad y'(\eta - \beta) + \xi - \alpha = 0,$$

qui, en regardant ξ, η comme des coordonnées courantes, représentent la tangente menée à X au point (x, y), et la perpendiculaire abaissée de P sur cette tangente. Donc la courbe X doit satisfaire à l'équation différentielle du premier ordre

$$(3) \qquad \varphi(x, y, y') = 0,$$

que l'on obtiendra par l'élimination de ξ, η entre les trois précédentes, et cette courbe n'est d'ailleurs analytiquement astreinte qu'à cette seule condition.

Lorsqu'on aura été conduit à l'équation (1) par le problème direct, dont l'énoncé a d'abord été rappelé, par rapport au point P et à une certaine courbe B, l'équation de cette courbe sera toujours une solution singulière de l'équation (3), et l'intégrale générale sera l'équation des tangentes dans laquelle il n'entre d'autre paramètre arbitraire que le coefficient angulaire. En effet, ces deux équations doivent satisfaire à l'équation (3), car la courbe B et ses tangentes possèdent la propriété géométrique que l'équation (3) exprime, et l'équation des tangentes, qui contient une arbitraire (le coefficient angulaire), est l'intégrale générale, tandis que l'équation de B, qui ne contient pas d'arbitraire et ne peut se déduire de celle des tangentes, en attribuant une valeur particulière au coefficient angulaire, est une solution particulière.

Enfin, même quand l'équation (1) est donnée à priori, il résulte des principes connus qu'il y a des lignes dont l'équation est l'intégrale générale de l'équation (3). Or, si ces lignes étaient des courbes, l'équation des tangentes, dans laquelle se trouverait nécessairement la même arbitraire que dans l'équation de ces courbes, outre le coefficient angulaire qui est tout à fait indépendant de cet arbitraire, satisferait aussi à l'équation (3); mais cela est absurde, car l'équation la plus générale qui puisse satisfaire à une équation différentielle du premier ordre ne doit contenir qu'une seule arbitraire; donc *l'intégrale générale de l'équation* (3) *sera toujours de la forme*

$$y = \lambda x + \psi(\lambda), \tag{4}$$

$\psi(\lambda)$ *étant une fonction qui dépendra de la nature de* A, *et l'on aura l'équation de* X *par l'élimination de* λ *entre cette équation et*

$$x + \psi'(\lambda) = 0,$$

d'après la théorie des solutions singulières.

APPLICATIONS.

I. La ligne A est une droite. En prenant cette droite pour axe des y et la perpendiculaire abaissée du point P pour axe des x, on trouve facilement que l'équation (3) est, dans ce cas,

$$xy'^2 - yy' + \alpha = 0.$$

Si l'on pose

$$y = \lambda x + \mu, \quad \text{d'où} \quad y' = \lambda,$$

il vient, en substituant,

$$\mu\lambda - \alpha = 0, \quad \text{d'où} \quad \mu = \frac{\alpha}{\lambda}:$$

par conséquent, l'intégrale générale est

$$y = \lambda x + \frac{\alpha}{\lambda},$$

et l'élimination de λ entre cette équation et $x - \frac{\alpha}{\lambda^2} = 0$ donne

$$y^2 = 4\alpha x.$$

II. La courbe A est une circonférence. En prenant pour axe des x la droite menée du centre au point P, et pour axe des y la perpendiculaire élevée à cette droite par le centre, l'équation (3) est

$$(x^2 - R^2)\, y'^2 - 2\, xyy' + y^2 - R^2 + \alpha^2 = 0,$$

R désignant le rayon de la circonférence. Si l'on pose, de même que ci-dessus,

$$y = \lambda x + \mu,$$

il vient, en substituant puis en résolvant par rapport à μ,

$$\mu = \pm\sqrt{R^2\lambda^2 + R^2 - \alpha^2},$$

de sorte que l'intégrale générale est

$$y = \lambda x \pm \sqrt{R^2\lambda^2 + R^2 - \alpha^2};$$

et l'élimination de λ entre cette équation et

$$x \pm \frac{R^2\lambda}{\sqrt{R^2\lambda^2 + R^2 - \alpha^2}} = 0,$$

donne

$$R^2 y^2 + (R^2 - \alpha^2)x^2 = R^2(R^2 - \alpha^2).$$

III. La courbe A est une parabole dont le point P est le sommet. En prenant pour axes des x et des y l'axe de la parabole et la tangente au sommet, il faut éliminer ξ, η entre les équations

$$\eta^2 - 2p\xi = 0, \quad \eta - y'\xi = y - xy', \quad y'\eta + \xi = 0,$$

pour avoir l'équation (3) qui est

$$2py'^3 + (2p - x)y' + y = 0.$$

On obtient facilement l'intégrale générale de cette équation, savoir

$$y = \lambda x - 2p\lambda(1 + \lambda^2),$$

et la solution singulière

$$y = \frac{2}{3\sqrt{6p}}(x - 2p)^{\frac{3}{2}},$$

soit de la manière indiquée pour les exemples précédents, soit par le procédé de la différentiation (l'équation dont il s'agit rentre dans le type connu sous le nom d'*équation de Clairaut*).

Pour la développée de la parabole dont le paramètre est double de celui de la parabole A et qui a le même sommet, ainsi que le même axe, on trouve

$$Y = \frac{2}{3\sqrt{3p}}(X - 2p)^{\frac{3}{2}};$$

donc, pour $x = X$, on a

$$\frac{y}{Y} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

cette relation fait parfaitement connaître la forme de X.

Nota. Ces applications peuvent se faire tout aussi simplement par la première marche qui a été indiquée et qui n'exige que la connaissance des premiers principes du calcul différentiel; mais il n'en est pas toujours ainsi.

MÉLANGES.

1. Un système de droites parallèles mis en perspective devient un faisceau convergent vers un point. Guido Ubaldi a le premier démontré didactiquement ce théorème fondamental dans cet ouvrage : *Guidi Ubaldi e Marchionibus montis Perspectiva libri sex. Pisauri, apud Hieron. Concordam, MDC; fol.*

La proposition est sur la page 28 du I^er livre. M. Poudra, chef d'escadron d'état-major en retraite, géomètre éminemment compétent et qui s'occupe d'un Traité historique et didactique de la perspective (*), m'écrit : « L'ou-
» vrage de G. Ubaldi est d'un savant géomètre qui a
» envisagé son sujet sous toutes les formes; il est plus
» complet et surtout plus savant que nos Traités mo-
» dernes de perspective; il contient une méthode de
» géométrie descriptive, et beaucoup de choses sont de
» son invention. La dernière page contient un tracé des
» échelles de perspective. Ainsi, Desargues n'en est pas
» l'inventeur quoiqu'il en eût fait un très-grand usage.
» Le VI^e et dernier livre, consacré à la perspective des

(*) La publication est à désirer dans l'intérêt de la science et de l'art.

» théâtres, est fort curieux. Il fait connaître les moyens
» employés par les artistes pour tracer les décorations.
» Ce n'est pas de la perspective plane, mais sur des plans
» parallèles. C'est bien un commencement de perspective-
» relief (*). Ainsi, il indique le moyen de déterminer le
» point de concours de toutes les droites perpendiculaires à
» la toile; mais il s'arrête là. Ce qu'on peut reprocher à
» cet auteur, comme à tous les savants de ce temps-là,
» c'est d'être très-diffus, et ses *vingt-trois* méthodes pour
» déterminer un point seraient considérées par les géo-
» mètres modernes comme des futilités. »

2. Les anciens ne connaissant pas la gravité, ne pouvaient s'enquérir du *centre de gravité*. Ils ne parlent réellement que du *centre du poids* (c'est à tort qu'on traduit ce mot par gravité), point qu'il faut soutenir pour que le corps ne tombe pas. C'est la définition de Pappus : *Dicimus autem centrum gravitatis uniuscujusque corporis esse punctum quoddam intra positum a quo si grave dependens mente concipiatur dum fertur quiescerit et servat eam quamquam in principio habebat positionem neque in ipsa latione circumvertitur* (lib. VIII, page 449; *Bononiæ*, 1660).

M. Libri dit que c'est Léonard de Vinci qui, le premier, a déterminé le centre de gravité de la pyramide (*Hist. des Math. en Italie*, tome III, page 36); mais l'auteur attribue tant de découvertes à l'illustre artiste, qu'on ne sait trop à quoi s'en tenir. Il faudrait contrôler les manuscrits de de Vinci qui sont écrits, chose bizarre, de droite à gauche comme chez les Orientaux de race sémitique (*Ouv. cité*, tome III, page 36). Frédéric Commandin, le célèbre traducteur, est le premier qui

(*) *Voir* un Rapport de M. Chasles dans les *Comptes rendus*, 1853, 2me semestre, page 880; exposition savamment lucide de la perspective-relief, objet principal de l'ouvrage de M. Poudra.

ait écrit *ex professo* sur le centre de gravité des solides, dans son ouvrage : *De centro gravitatis solidorum.*

3. On lit dans le III^e cahier du tome XLV, page 239 (1853), du Journal de M. Crelle, un Mémoire sur la cubature des solides trapézoïdaux. Les formules et les raisonnements sont identiques aux formules et aux raisonnements de M. Finck (*Nouvelles Annales*, tome VII, page 241; 1848).

4. Pour expliquer la possibilité d'un rapport fini entre quantités infinitésimales, on se sert d'une droite inscrite dans un triangle parallèlement à un côté (*Nouvelles Annales*, tome XII, page 295). Un érudit géomètre, qui a voulu garder l'anonyme, fait observer que ce moyen a déjà été indiqué par le célèbre d'Antony dans le deuxième volume de son *Cours de Mathématiques* publié en italien en 1779, à l'usage de l'École d'artillerie de Turin. Le même érudit ajoute que le système de *compensations d'erreurs* proposé par Carnot pour expliquer la théorie différentielle, est énoncé formellement dans une Note de Lagrange annexée à un Mémoire du père Gerdil, qu'on trouve dans le volume des *Mélanges* de Turin, 1760-1761. Il paraît que l'illustre analyste ne tenait pas beaucoup à cette idée, car il n'en dit rien dans ses *Fonctions analytiques*, ni dans ses autres ouvrages.

5. Décrivant deux cercles *égaux* ayant pour centre les foyers d'une ellipse, prenant successivement la polaire réciproque de l'ellipse par rapport à ces deux cercles directeurs, on obtient encore deux cercles *égaux*, symétriques par rapport au centre de l'ellipse. Par une demi-révolution de l'un de ces derniers cercles autour de ce centre, il viendra s'appliquer sur l'autre cercle, et, au moyen de cette opération, on peut transporter des propriétés métriques de l'ellipse dans le cercle, et *vice versâ.* Exemples : la somme des rayons vecteurs est constante

dans l'ellipse; à cette propriété métrique correspond, par le procédé indiqué, cette autre propriété dans le cercle : si par un point *fixe* pris dans le plan du cercle, on mène une corde quelconque, la somme des distances inverses du point fixe aux deux tangentes menées par les extrémités de la corde est constante. Les angles inscrits dans le même segment de cercle sont égaux; la propriété correspondante dans l'ellipse est que les deux tangentes menées par le même point sont également inclinées sur les rayons vecteurs qui passent par ce point; théorème de M. Poncelet : c'est M. Mannheim, lieutenant d'artillerie, qui propose ce moyen *euristique*.

6. Mohammed-ben-Moussa-Alkharesmi, célèbre mathématicien arabe (+ 812), était de la province de Kâresm, écrit en perse et en arabe Khovâresm, mais prononcé Khâresm. M. Regnaud, le célèbre arabiste, croit que c'est là l'origine du mot *algorisme* devenu *algorithme*. (*Nouvelles Annales*, tome V, page 557.)

7. Le célèbre inventeur des logarithmes a commencé sa carrière par où Newton a fini la sienne. L'ouvrage suivant : *Explication claire de tous les secrets de l'Apocalypse ou Révélation de saint Jean*, mise en français par George Thompson, la Rochelle, 1602, in-4°, est une traduction de l'ouvrage anglais de Napier. Newton et Napier voient le pape dans l'Antechrist; nés sur les bords du Tibre, ils y auraient vu Luther ou Calvin.

Une excentricité analogue est encore offerte par un autre homme de génie, par le célèbre Stiffel, moine Augustin, devenu ministre luthérien (voir *Nouvelles Annales*, tome V, page 494). Le nombre 1260 se rencontre deux fois dans l'Apocalypse (XI, 3; XII, 6); Stiffel écrit les 27 premiers nombres triangulaires à commencer par 1 et à finir par 276, successivement au-dessus des 27 lettres de l'alphabet, rangées en ordre, les lettres *j* et *u* sont omises. Ensuite, il compose cette phrase: *vae tibi papa vae tibi.* Il remplace chaque lettre par le nombre triangulaire correspondant; la somme se monte exactement à 1260 (*). De telles aberrations, chez de telles intelligences, doivent nous disposer à l'indulgence pour les aberrations d'hommes ordinaires, telles que nous en voyons de nos jours. On a dit que les tables *parlantes* pouvaient constituer des relations avec l'enfer, dites avec Charenton.

8. *Chaire Lucasienne.* Les statuts de cette chaire, fondée au collége de la Trinité à Cambridge, par le chevalier Lucas, sont du 19 décembre 1663, et ont été approuvés par Charles II le 8 janvier 1664. Newton fut nommé professeur Lucasien le 29 octobre 1669, à l'âge de vingt-sept ans. Le professeur est tenu de donner par semaine une leçon d'environ une heure; en outre, il est tenu, deux jours par semaine, de laisser libre accès dans son cabinet pendant deux heures à ceux qui viennent le consulter, et de donner les réponses *de bon cœur:* « *Per duas horas... omnibus illum consultaris vacare, liberum adeuntibus aperto cubiculo accessum præbere, circa propositas ipsi quæstiones et difficultates haud gravate respondere.* » Les deux jours sont réduits à un seul pendant les vacances si le professeur est en résidence.

Ces dispositions réglementaires, quand il s'agit du haut enseignement, me semblent souvent plus utiles, plus importantes que le cours même, et devraient être adoptées dans les Facultés et surtout au Collége de France.

9. M. Genocchi cite M. Ménabréa (tome XII, page 265). C'est à propos d'un Mémoire que ce savant a

(*) Il prenait un bain et faisait calculer son domestique: il sortit tout nu pour vérifier le résultat, et l'ayant trouvé juste, il se livra à des accès de joie dignes de cette folie.

publié à Turin en 1844; ce Mémoire a pour titre : *Mémoire sur la série de Lagrange*, par L.-F. Ménabréa, capitaine du génie militaire, il est extrait des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin*, tome VIII, série 2. Je dois ce renseignement à M. l'abbé Lecointe.

10. Dans les *Archives de Mathématiques* de M. Grunert (tome XVI, pages 67; 1851), M. J. Dienger, professeur de l'École Polytechnique de Carlsruhe, donne des démonstrations très-simples, claires et rigoureuses des théorèmes d'*addition* des fonctions abéliennes; démonstrations suivies d'applications aux fonctions elliptiques. Nous donnerons ces démonstrations, si les abonnés en témoignent le désir.

11. *δὸς μοὶ πȣ στῶ καὶ κίνω την γῆν* : Donne-moi où je puisse rester, et je meus la terre. Parole d'Archimède citée par Pappus, dans ses chapitres sur la mécanique.

12. Dans une Note à l'article Ramus (*Biographie Michaud*), page 63, le consciencieux et érudit M. Weiss nous apprend que J. Guillaume de Bonheim, écrivain contemporain, cité par Freytag (*Adparatus litterarius*, p. 51), dit que Charpentier fut non-seulement étranger au meurtre de Ramus, mais qu'il témoigna la plus vive douleur en apprenant la mort d'un si grand homme, l'ornement de l'Université. Nous aimons à pouvoir effacer une imputation répétée par tant d'historiens (*voir* tome XII, page 293, note).

13. Alkhayyami est mort en 517 de l'hégire, ce qui correspond à l'année 1123, d'après ce que rapporte M. Sédillot, dans ses prolégomènes des Tables d'Oloug-Beg, page 244 (*Nouvelles Annales*, pages 152 et 156).

14. On lit (*Nouvelles Annales*, tome XIII, page 158) : il y a autant de décompositions (en sommes de deux carrés) pour un nombre n que pour son double. On a adressé

l'objection suivante

$$8450 = 13^2 + 91^2 = 23^2 + 89^2 = 35^2 + 85^2$$
$$= 47^2 + 79^2 = 65^2 + 65^2$$

en tout cinq décompositions; tandis que pour la moitié, on n'a que ces quatre décompositions

$$4225 = 16^2 + 63^2 = 25^2 + 60^2 = 33^2 + 56^2 = 39^2 + 52^2,$$

mais on a omis

$$4225 = 0^2 + 65^2.$$

15. M. Parion (Faubourg-Saint-Denis, 69), indique sur une page lithographiée le moyen suivant pour faciliter l'addition de longues colonnes de chiffres; quand on a atteint 20, on fait un point au crayon, afin de pouvoir l'effacer; puis, on continue l'addition, en ajoutant seulement l'excédant du nombre 20; ensuite, on ajoute à la colonne suivante un nombre double de celui des points ainsi marqués. Si la colonne a $3n$ chiffres, le nombre maximum des points est n.

SOLUTION DE LA QUESTION 255

(voir t. XI, p. 314);

Par M. E. COMBESCURE,
Professeur (New-York).

Si l'on substitue dans l'équation polaire d'une droite r^2 au lieu du rayon vecteur r, et 2ω au lieu de l'angle polaire ω, on obtient l'équation d'une hyperbole équilatère. D'une manière analogue, en substituant $\sqrt{-1}\,(\tang \frac{1}{2} r)^2$ pour $\tang \frac{1}{2} r$ et 2ω pour ω, dans l'équation polaire sphérique d'un grand cercle, et en changeant les constantes de manière que les imaginaires disparaissent, on tombera sur l'équation d'une hyperbole sphérique. (Strebor.)

L'hyperbole équilatère sphérique peut être considérée comme l'intersection de la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

et de l'hyperboloïde

$$1 + z^2 = a\,(x^2 - y^2);$$

son équation entre le vecteur sphérique r et la longitude ω sera donc

$$\frac{1 + \cos^2 r}{\sin^2 r} = a \cos 2\omega.$$

L'équation générale de la circonférence d'un grand cercle est, dans le même système de coordonnées,

$$\cot r = \mathrm{A} \cos(\omega - \alpha),$$

ou

$$\frac{1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} r}{2 \operatorname{tang} \frac{1}{2} r} = \mathrm{A} \cos(\omega - \alpha).$$

En y substituant $\sqrt{-1}\ \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} r$ pour $\operatorname{tang} \frac{1}{2} r$, cette équation devient

$$\frac{1 + \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} r}{2\sqrt{-1}\ \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} r} = \mathrm{A} \cos(2\omega - \alpha),$$

où l'on a remplacé aussi ω par 2ω. Or,

$$\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} r = \frac{1 - \cos r}{1 + \cos r};$$

et, conséquemment,

$$\frac{(1 - \cos r)^2 + (1 + \cos r)^2}{2\sqrt{-1}\,(1 + \cos r)(1 - \cos r)} = \mathrm{A} \cos(2\omega - \alpha),$$

ou

$$\frac{1 + \cos^2 r}{\sin^2 r} = \mathrm{A}\sqrt{-1} \cos(2\omega - \alpha).$$

Mettant a pour $\mathrm{A}\sqrt{-1}$, et supposant nulle la constante α, on retombe sur l'équation de l'hyperbole équilatère sphérique, ainsi qu'il était proposé de le vérifier.

TABLES DES VALEURS DE $\Delta^n 0^m$.

$\Delta^n 0^m$ est la valeur $\Delta^n x^m$ en y faisant $x = 0$;

$$f(x+1) - f(x) = \Delta f(x),$$

et l'on a

$$\Delta^n 0^m = n^m - \frac{n}{1}(n-1)^m + \frac{n(n-2)}{1.2}(n-2)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^m + \ldots$$

(Lacroix, *Calcul des différ.*, n° 86.)

Comme ces valeurs reviennent très-souvent dans le calcul aux différences finies (maintenant employé dans la résolution numérique des équations), nous croyons utile de donner la Table suivante consignée (page 9) dans cet excellent ouvrage : *A collection of examples of the applications of the calculus of finite differences*, by J.-F.-W. Herschel; Cambridge, 1820, in-8° de 42 pages.

	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7	Δ^8	Δ^9	Δ^{10}
0^1	1									
0^2	1	2								
0^3	1	6	6							
0^4	1	14	36	24						
0^5	1	30	150	240	120					
0^6	1	62	540	1560	1800	720				
0^7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040			
0^8	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320		
0^9	1	510	18150	186480	834120	1905120	2328480	1451520	362880	
0^{10}	1	1022	55980	818520	5103000	16435440	29635200	30240000	16329600	3628800

On a

$$\Delta^n.0^n \quad = 1.2.3\ldots n;$$

$$\Delta^n.0^{n+1} = 1.2.3\ldots n+1.\frac{n}{2};$$

$$\Delta^n.0^{n+2} = 1.2.3\ldots n+2.\frac{3n^2+n}{24};$$

$$\Delta^n.0^{n+3} = 1.2.3\ldots n+3.\frac{n^3+n^2}{48};$$

$$\Delta^n.0^{n+4} = 1.2.3\ldots n+4.\frac{15n^4+30n^3+5n^2-2n}{5760}$$

(Lacroix, *Cal. diff.*, p. 861, 946);

lorsque n est très-grand, on a les valeurs approchées

$$\Delta^n.0^n \quad = \sqrt{2\pi}.n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

$$\Delta^n.0^{n+1} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.n^{\frac{5}{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

$$\Delta^n.0^{n+2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{8}.n^{\frac{9}{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

$$\Delta^n.0^{n+3} = \frac{\sqrt{2\pi}}{49}.n^{\frac{13}{2}}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

A la fin de l'ouvrage, on trouve *Examples of the solutions of fonctional equations, by Charles Babbage;* c'est le célèbre inventeur de la machine mathématique la plus universelle, la plus prodigieuse qu'on ait jamais imaginée; elle calcule une série quelconque dont on connaît la loi par différences.

Sir John Herschel est le célèbre astronome auteur de l'article *Lumière* dans l'*Encyclopédie métropolitaine*, directeur de la Monnaie, poste occupé jadis par Newton. C'est un des esprits les plus vastes, un des caractères les plus beaux, les plus élevés que possède l'Angleterre. L'ouvrage cité ci-dessus est extrêmement instructif pour s'exercer au calcul par différence, direct et inverse. Ce sir John Herschel est le fils illustre de l'illustre William Herschel Uranus. Rappelons, en passant, que la première idée de Herschel, en découvrant sa planète, était de lui donner le nom de son bienfaiteur, le roi Georges : cet homme avait aussi du génie dans le cœur.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE.

Sur les courbes engendrées par le mouvement de reptation, pour servir d'éclaircissement à plusieurs passages des OEuvres de Jean Bernoulli.

PAR M. PROUHET,

Professeur.

Les OEuvres de J. Bernoulli (*) renferment plusieurs théorèmes d'une rare beauté, qui excitèrent dans le temps l'admiration de Leibnitz, mais qui, négligés, à ce qu'il paraît, par leur propre inventeur, ne tardèrent pas à tomber dans un oubli presque complet (**). M. Terquem, à l'érudition duquel ils n'avaient pas échappé, m'ayant engagé à en rétablir la démonstration, j'ai cherché à reconstruire la théorie même du grand géomètre, à l'aide d'indications puisées dans ses OEuvres. Du reste, les passages cités faisaient connaître le principe même de la méthode. Toute la difficulté résidait dans un lemme (IX) non énoncé par Bernoulli, mais qu'une étude attentive de la question ne pouvait manquer de faire découvrir.

(*) JOHANNIS BERNOULLI *Opera omnia*. Lausannæ et Genevæ, 1742, t. I, art. 26, 72, 74, 77 à 83. On peut aussi consulter le *Leibnitii et Bernoullii Commercium philosophicum et mathematicum*.

(**) Bernoulli est mort en 1748, et son dernier article sur le mouve-

Une fois en possession de ce lemme, on arrive sans peine à une formule d'approximation très-élégante et dont la démonstration semblait exiger l'emploi d'une analyse plus relevée.

Legendre (*) est, à notre connaissance, le seul auteur qui ait démontré les théorèmes de Bernoulli. Il arrive, en effet, par l'emploi des séries, à la formule d'approximation dont nous venons de parler; mais son analyse nous paraît incomplète. En donnant deux valeurs approchées d'un arc de courbe, il n'indique nullement à quel caractère on reconnaîtra qu'elles comprennent l'arc considéré. Là est peut-être le secret d'une sorte de paradoxe analytique dont Legendre ne semble pas donner une explication très-satisfaisante.

§ I. — *Du mouvement de reptation en général.*

Définitions. 1. Lorsqu'une courbe B se meut parallèlement à elle-même et de manière à être toujours tangente à une courbe fixe A, on dit que B rampe sur A (*fig.* 1).

2. Le lieu décrit par un point quelconque du plan de la courbe B est appelé *reptoire* (reptoria).

3. La courbe mobile est dite ramper *extérieurement* ou *intérieurement* sur la courbe fixe, suivant que, dans le cours du mouvement, les deux courbes sont situées de part et d'autre de la tangente commune ou du même côté. Suivant que l'un ou l'autre cas a lieu, la reptoire engendrée est dite *extérieure* ou *intérieure*.

4. L'angle formé par les normales menées aux extré-

---

ment de reptation (*motus reptorius*) est de 1709 (Lettre à Leibnitz). Cette Lettre se termine par ces mots : *Alia mirabiliora in aliam occasionem refero.* Mais il n'a rien paru de ces choses plus admirables dans les OEuvres publiées du vivant de l'auteur.

(*) *Théorie des Fonctions elliptiques*, t. II. *Appendice.*

mités d'un arc de courbe est nommé l'*amplitude* de cet arc.

Le mot amplitude n'a pas ici la même signification que dans la *Théorie des Fonctions elliptiques*. Nous nous en servirons toujours dans le sens que lui attribue Bernoulli, à moins que nous n'avertissions expressément du contraire. Le point de rencontre des normales extrêmes se nommera le *centre d'amplitude*.

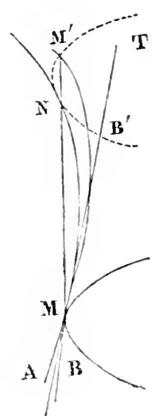
5. Dans le mouvement de reptation, les divers points d'un arc de la courbe rampante sont amenés successivement au contact en divers points d'un arc d'égale amplitude de la courbe fixe. Ces deux arcs sont appelés *arcs générateurs* de l'arc correspondant de la reptoire.

Théorème I. *Dans tout mouvement de reptation, deux points quelconques du plan de la courbe mobile décrivent des reptoires égales et semblablement placées.*

Cela résulte immédiatement de ce que la longueur et l'*orientation* de la droite qui unit ces deux points ne changent pas dans tout le cours du mouvement.

Théorème II. *La tangente en un point de la reptoire est parallèle à la tangente qui est actuellement commune aux deux courbes génératrices.*

Fig. 1.



Puisque les reptoires engendrées par les divers points de la figure mobile sont égales et semblablement placées, considérons comme point décrivant le point de contact M des deux courbes A et B (*fig.* 1). Je dis que la tangente à la reptoire en ce point n'est autre que MT, tangente actuellement commune aux deux courbes proposées.

En effet, imaginons que le mouvement de reptation ait amené B en B′ et M et M′. La droite MM′, corde de la reptoire, rencontrera la courbe A en un point N, d'autant plus voisin de M que la courbe B aura été moins dérangée de sa position initiale. Il suit de là que si l'on fait revenir B′ en B, M′ et N arriveront en même temps en M, et que MM′ sera, à la limite, tangente à la courbe A et à la reptoire. Elle se confondra donc avec MT. C. Q. F. D.

Remarques I. Le point M et le point décrivant peuvent être considérés, pendant un temps infiniment petit, comme se mouvant sur deux droites parallèles et dans le même sens. Il en résulte que :

Un arc de la courbe fixe et l'arc correspondant de la reptoire ont leurs concavités tournées vers la même région du plan, par rapport à deux tangentes parallèles quelconques.

Il suit de là que si les deux courbes génératrices sont convexes, la reptoire *extérieure* le sera également.

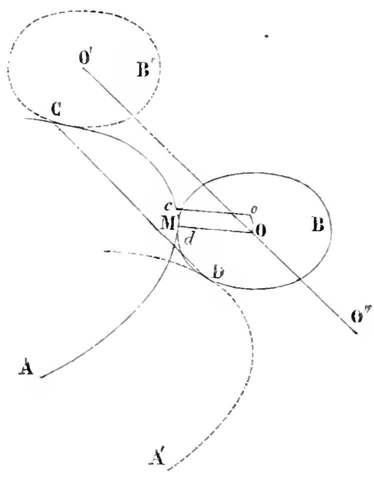
II. Dans le cas où la courbe mobile a un point d'inflexion, il est visible que si le point de contact se mouvait dans un sens avant que le point d'inflexion ait été amené au contact, il se mouvra ensuite dans le sens opposé. La direction suivie par le point M devant aussi changer de sens (Rem. I), il en résultera dans la reptoire *un point de rebroussement de seconde espèce.*

III. Une reptoire intérieure peut avoir des points de rebroussement, lors même que les deux proposées n'ont aucune inflexion. Cela vient de ce que la courbe mobile, d'abord enveloppée par la courbe fixe dans une partie de son cours, l'enveloppe au contraire dans une autre. Mais ces diverses circonstances ne peuvent être bien étudiées que sur des exemples particuliers.

IV. Un arc de reptoire a même amplitude que chacun des arcs générateurs.

Théorème III. *La reptoire engendrée par la courbe* A *rampant sur la courbe* B, *ne diffère que par la situation de la reptoire engendrée par* B *rampant sur* A.

Fig. 2.



Supposons que les deux courbes aient une tangente commune en M. Soient MC et MD deux arcs d'égale amplitude pris de part et d'autre du point M, le premier sur la courbe A, le second (*fig.* 2) sur la courbe B. Soit O le point décrivant.

Si l'on fait ramper B sur A, D viendra en C, et le point

O viendra en O', de telle sorte que OO' sera égal et parallèle à CD.

Si l'on fait ramper A sur B, C viendra en D, et le point point O viendra en O'', de telle sorte que OO'' sera égal et parallèle à CD.

Il suit de là que les deux points O' et O'' sont symétriques par rapport au point O. Les deux reptoires engendrées par le point O dans ces deux mouvements, ont donc leurs points symétriques deux à deux par rapport à la position initiale O; par suite, elles ne diffèrent que par la situation.

Théorème IV. *Un arc de reptoire est égal à la somme ou à la différence de ses arcs générateurs suivant que la reptoire est extérieure ou intérieure.*

Prenons sur la courbe fixe A (*fig.* 2, cas d'une reptoire extérieure) un arc infiniment petit Mc dans le sens du mouvement, et sur la courbe mobile, dans le sens contraire, un arc de même amplitude Md. Les deux arcs Mc et Md peuvent être considérés comme deux lignes droites ayant la même direction que la tangente commune en M.

La courbe B s'étant déplacée infiniment peu jusqu'à ce que d vienne en c, le point décrivant O viendra en o; par la nature du mouvement, oc sera égal et parallèle à Od, et la figure $Oocd$ sera un parallélogramme. On aura donc $Oo = Md + Mc$, ce qui démontre le théorème pour les éléments des trois courbes, et, par suite, pour des portions finies de ces courbes.

Le cas d'une reptoire extérieure se traiterait d'une manière analogue.

Soit $d\sigma$ un arc infiniment petit de la reptoire, et ds, ds' les deux arcs générateurs. On aura

$$d\sigma = ds \pm ds'.$$

Mais ces trois arcs, ayant même amplitude, auront même angle de contingence $d\tau$. Donc

$$\frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau} \pm \frac{ds'}{d\tau}$$

ou

$$\rho = r \pm r',$$

en appelant ρ, r, r' les rayons de courbure des trois courbes. Ainsi :

Le rayon du cercle osculateur en un point de la reptoire est égal à la somme algébrique des rayons des cercles osculateurs des courbes génératrices aux points correspondants.

D'où résulte ce corollaire :

La longueur d'un arc pris sur la développée de la reptoire est égale à la somme algébrique des longueurs des arcs correspondants pris sur les développées des deux courbes génératrices.

Lorsque deux courbes sont équidistantes, on peut considérer l'une d'elles comme la reptoire engendrée par le centre d'un cercle qui ramperait extérieurement ou intérieurement sur l'autre courbe. De là se déduisent facilement les relations connues entre les arcs de deux courbes équidistantes (*).

IV. *Si l'on imagine qu'une droite de longueur déterminée se meuve en touchant continuellement une courbe fixe, la somme algébrique des arcs décrits par ses extrémités sera égale à un arc de cercle ayant pour rayon*

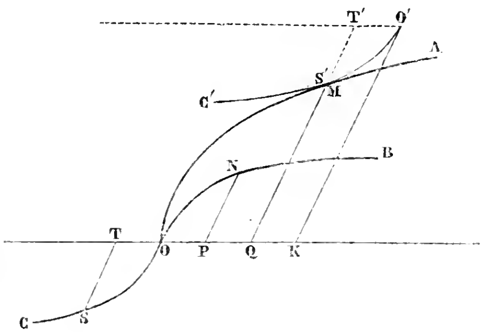
(*) BRETON (de Champ), *Nouvelles Annales*, tome III, page 442. Ce théorème était connu de Leibnitz et de Bernoulli. *Voir* le *Commercium mathematicum*, tome II, page 152.

la longueur de la tangente mobile, et pour amplitude l'angle formé par les deux positions extrêmes de cette tangente.

Car les extrémités de cette tangente décrivent deux développantes de la courbe fixe, c'est-à-dire deux courbes équidistantes.

THÉORÈME V. *Soient* A *et* B *deux courbes ayant une tangente commune en* O *et leur concavité tournée dans le même sens;* OM, ON *deux arcs variables d'égale amplitude pris respectivement sur les deux courbes. Prenons le point* O *pour origine d'un système de coordonnées rectilignes, et construisons le lieu* R *des points ayant pour coordonnées la somme des coordonnées de même nom des points* M *et* N : *un arc quelconque de la courbe* R, *compté à partir du point* O, *est égal à la somme des arcs correspondants des courbes* A *et* B, *et a même amplitude que chacun d'eux.*

Fig. 3.



Faisons ramper sur A la courbe C symétrique de B par rapport à l'origine, et prenons cette origine pour point décrivant. S étant le symétrique de N, la tangente menée à la courbe C par le point S sera parallèle à la tangente menée à la courbe B par le point N, et, par suite, à la tangente menée à la courbe A par le point M. Donc le mouvement de reptation amènera le point S en M : ST, ordonnée du point S et égale (en valeur absolue) à NP, se placera en S′T′ sur MQ prolongé, et TO = OP se placera en T′O′ sur une parallèle à OX. D'où résulte, en appelant OK et O′K les coordonnées de O′,

$$\begin{aligned} O'K &= T'Q = T'S' + MQ = NP + MQ, \\ OK &= OQ + QK = OQ + T'O' = OQ + OP. \end{aligned}$$

Le point O′ est donc un point du lieu que nous avons appelé R, mais, d'un autre côté, O′ appartient à une reptoire extérieure; donc

$$\text{arc } OO' = \text{arc } OM + \text{arc } ON,$$

et, de plus, l'arc OO′ (2, IV) a même amplitude que les deux axes générateurs.

Remarque. Plus généralement, s', s'', s''', etc., soient des arcs de même amplitude ayant une origine et une tangente commune en O; (x', y'), (x'', y'') leurs extrémités; (x, y) un point quelconque d'une courbe s donnée par les équations

$$\begin{aligned} x &= a'x' + a''x'' + a'''x''' + \ldots, \\ y &= a'y' + a''y'' + a'''y''' + \ldots, \end{aligned}$$

on aura

$$s = a's' + a''s'' + \ldots.$$

Ce théorème peut se démontrer au moyen du précédent, mais on peut encore l'établir par un calcul direct, ce qui n'est pas plus long et est préférable, attendu qu'on n'a pas besoin alors de supposer que a', a'', etc., soient des nombres entiers.

(*La suite prochainement.*)

SOLUTION DE LA QUESTION 180

(voir t. VII, p. 157);

PAR M. COMBESCURE.

Étant donnée la base d'un triangle curviligne formé par trois arcs de parabole ayant le même foyer, le lieu du sommet, lorsque l'angle fait par les deux côtés est constant, sera un ovale de Descartes.

L'équation polaire d'une parabole est, entre les coordonnées r et θ, issues du foyer.

$$r = \frac{p}{1 - \cos(\theta - \varepsilon)},$$

p et ε étant deux constantes arbitraires dont la signification est très-connue. En faisant passer la parabole par le point (r_1, θ_1), on aura

$$r = r_1 \frac{1 - \cos(\theta_1 - \varepsilon)}{1 - \cos(\theta - \varepsilon)} \quad \text{ou} \quad r = r_1 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta_1 - \varepsilon)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta - \varepsilon)}.$$

Pour une deuxième parabole de même foyer et passant par un point (r_2, θ_2), on aurait semblablement

$$r = r_2 \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta_2 - \omega)}{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta - \omega)}.$$

Ces deux équations prises ensemble déterminent les coordonnées r, θ du sommet du triangle parabolique; mais il faut y joindre la condition relative à l'angle au sommet. Or μ et ν étant les inclinaisons respectives des deux paraboles sur le rayon vecteur r, on a

$$\tang \mu = \frac{rd\theta}{dr} = \frac{d\theta}{d.lr} = -\cot\frac{1}{2}(\theta - \varepsilon),$$

$$\tang \nu = -\cot\frac{1}{2}(\theta - \omega);$$

d'où, en appelant $\frac{A}{2}$ l'angle donné au sommet,

$$\tang\frac{A}{2} = \tang(\mu - \nu) = \tang\frac{1}{2}(\varepsilon - \omega), \quad \varepsilon - \omega = A.$$

En éliminant ε entre les deux équations

$$\sqrt{\frac{r}{r_1}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\theta_1 - \varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\theta - \varepsilon)}, \quad \sqrt{\frac{r}{r_2}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\theta_2 + A - \varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\theta + A - \varepsilon)},$$

on aura l'équation du lieu cherché entre r et θ, et il faudra se rappeler que, dans l'équation ainsi obtenue, $\sqrt{r_1}$, $\sqrt{r_2}$ sont censés comporter le signe $\pm$. Ces équations donnent d'abord

$$\frac{\sqrt{r}+\sqrt{r_1}}{\sqrt{r}-\sqrt{r_1}} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\theta_1-\varepsilon)+\sin\frac{1}{2}(\theta-\varepsilon)}{\sin\frac{1}{2}(\theta_1-\varepsilon)-\sin\frac{1}{2}(\theta-\varepsilon)} = \frac{\tang\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1+\theta}{2}-\varepsilon\right)}{\tang\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1-\theta}{2}\right)},$$

$$\frac{\sqrt{r}+\sqrt{r_2}}{\sqrt{r}-\sqrt{r_2}} = \frac{\tang\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2+\theta}{2}+A-\varepsilon\right)}{\tang\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2-\theta}{2}\right)};$$

or

$$\tang\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1\mp\theta_2}{2}-A\right) = \tang\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1+\theta}{2}-\varepsilon-\frac{\theta_2+\theta}{2}+A-\varepsilon\right)$$

$$= \frac{\tang\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1+\theta}{2}-\varepsilon\right)-\tang\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2+\theta}{2}+A-\varepsilon\right)}{1+\tang\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1+\theta}{2}-\varepsilon\right)\tang\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2+\theta}{2}+A-\varepsilon\right)};$$

donc, en appelant k le premier membre et ayant égard aux équations précédentes,

$$k\left[\begin{array}{l}(\sqrt{r}-\sqrt{r_1})(\sqrt{r}-\sqrt{r_2})+(\sqrt{r}+\sqrt{r_1})(\sqrt{r}+\sqrt{r_2})\\ \times\operatorname{tang}\frac{\theta_1-\theta}{4}\operatorname{tang}\frac{\theta_2-\theta}{4}\end{array}\right]$$

$$=(\sqrt{r}+\sqrt{r_1})(\sqrt{r}+\sqrt{r_2})\operatorname{tang}\frac{\theta_1-\theta}{4}$$
$$-(\sqrt{r}+\sqrt{r_2})(\sqrt{r}-\sqrt{r_1})\operatorname{tang}\frac{\theta_2-\theta}{4};$$

ce qui se réduit à

$$\sin\frac{A}{2}\times r+\left[\sqrt{r_1}\sin\frac{1}{2}(\theta-A-\theta)-\sqrt{r_2}\sin\frac{1}{2}(\theta_2+A-\theta)\right]$$
$$\times\sqrt{r}-\sqrt{r_1}\sqrt{r_2}\sin\frac{1}{2}(\theta_1-\theta_2-A)=0,$$

ou, par une introduction facile de nouvelles constantes $2\sqrt{a}$, b, α,

$$r+2\sqrt{a}\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\sqrt{r}-b=0;$$

d'où

$$\sqrt{r}=\sqrt{a}\sin\frac{1}{2}(\theta-\alpha)\pm\sqrt{a\sin^2\frac{1}{2}(\theta-\alpha)+b},$$

et, si l'on veut,

$$\sqrt{r}=\sqrt{a}\sin\frac{1}{2}\theta\pm\sqrt{a\sin^2\frac{1}{2}\theta+b},$$

équation d'un ovale de Descartes.

PREMIÈRE QUESTION DE LEIBNIZ TRAITÉE PAR LE CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Une Lettre de Leibniz à Hugens, datée de Hanovre le 26 janvier 1680, commence ainsi :

« Voicy un exemple de ma méthode des touchantes. J'ay pris le premier qui me paroissoit également curieux et embarrassé d'irrationnelles, et vous jugerez bien que je ne l'ay pas accommodé à ma méthode et que j'en aurois pu faire autant avec quelque autre. »

Il parle ensuite d'un phosphore qu'il a inventé pour allumer du papier et de la poudre, espèce d'allumette chimique, et ensuite de la démonstration que donne Fermat de la loi de la réfraction, des pompes d'épuisement employées au Harz, et il joint à cette Lettre cet écrit latin :

Specimen utilitatis methodi novæ tangentium, sive de maximis et minimis.

La question peut s'énoncer ainsi :

Soient A, B, C, D quatre points en ligne droite, et E un point tel, que l'on ait

$$\frac{1}{EA}+\frac{1}{EB}+\frac{1}{EC}+\frac{1}{ED}=\frac{1}{m},$$

m est une longueur donnée; il s'agit de mener par le point E une tangente au lieu géométrique du point E.

Voici sa construction :

Concevons menée la tangente ET, rencontrant la droite AD au point T; abaissons la perpendiculaire EF sur la même droite AD; il s'agit donc de trouver le rapport $\frac{TF}{EF}$.

On construit ces huit lignes :

$$x_1 = \frac{m^3 . \mathrm{EF}}{\mathrm{DE}^3}, \quad x_2 = \frac{m^3 . \mathrm{EF}}{\mathrm{CE}^3},$$

$$x_3 = \frac{m^3 . \mathrm{EF}}{\mathrm{BE}^3}, \quad x_4 = \frac{m^3 . \mathrm{EF}}{\mathrm{AE}^3},$$

$$x_5 = \frac{m^3 . \mathrm{DF}}{\mathrm{DE}^3}, \quad x_6 = \frac{m^3 . \mathrm{CF}}{\mathrm{CE}^3},$$

$$x_7 = \frac{m^3 . \mathrm{BF}}{\mathrm{BE}^3}, \quad x_8 = \frac{m^3 . \mathrm{AF}}{\mathrm{AE}^3};$$

La différentiation de l'équation ci-dessus (page 286) donne tout de suite $\frac{dy}{dx}$, et cela quel que soit le nombre des points A, B, C, etc., et quelle que soit la relation entre les distances EA, EB, EC, etc. C'est l'immense avantage du calcul différentiel, la plus importante création que l'on ait jamais faite et qu'il soit même possible d'imaginer dans le monde des quantités. Il nous découvre l'essence embryonnaire des grandeurs; tandis que la puissance bornée du microscope met une limite aux investigations ovologiques des naturalistes, le géomètre dissèque le dx en une infinité de d^2x; le d^2x en une infinité de d^3x, etc., et rien n'arrête son scalpel (*).

Le *Spécimen* se termine ainsi :

Hanc solutionem paucis calculi linæis invenio, per methodos autem publicatas, quippe quibus irrationales tolli opus est, credo vix aliquot diebus inventum iri, et fortasse ne vix quidem. Tollendo enim irrationales assurgetur ad altissimos gradus, quod non sine tædio fieri potest : et tamen postea cum valores aut construc-

(*) C'est une tache indélébile pour notre enseignement secondaire de rejeter obstinément les conseils de d'Alembert, de Coriolis, et de repousser une locomotive intellectuelle la plus rapide qu'on connaisse.

tiones quærimus, cogemur aequationes inutiliter exaltatæ iterum depressiones investigare, qui labor in æquationibus decimum longe gradum excedentibus, qualis ista foret, sæpe immensus est (page 38).

Dans une Lettre précédente de Hanovre, 8 septembre 1679, il écrit :

« J'ay laissé à Paris mon manuscrit de la quadrature arithmétique, afin de l'y faire imprimer un jour. J'ay fort avancé depuis ces sortes de recherches, et je croy qu'on pourroit venir à bout de la pluspart des choses qui paroissoient jusqu'icy au-dessus du calcul, par exemple les quadratures et *methodus tangentium inversa*, et les racines irrationnelles des équations, et l'arithmétique de Diophante; car j'ay des méthodes générales qui donnent la pluspart de ces choses d'une manière aussi déterminée que celle dont l'Algèbre ordinaire se sert pour arriver à une équation. Et je ne crains pas de dire qu'il y a moyen d'avancer l'Algèbre au delà de ce que Viète et Des-Cartes nous ont laissé, autant que Viète et Des-Cartes ont passé les anciens. Mais, comme ces méthodes générales mènent ordinairement à des grands calculs, lorsque les conditions du problème ne fournissent pas quelque adresse singulière, j'ay projetté un moyen de les abréger : ce sont certaines Tables qu'on pourroit faire calculer en lettres, et qui seroient aussi importantes pour l'Algèbre que les Tables des sinus et des logarithmes le sont dans le calcul ordinaire. De plus, elles ne seroient pas difficiles à faire, car on y trouveroit bientost des progressions. Si ces Tables estoient faites, les opérations d'Algèbre s'y trouveroient pour la pluspart, et si on les joignoit aux méthodes que j'ay, il resteroit peu à faire en cette matière » (page 17).

Quelle était cette méthode pour l'arithmétique de Diophante, et en quoi pouvaient consister ces Tables ?

Il parle encore dans cette Lettre d'équations déterminées d'un nouveau genre, où le degré même est inconnu, et donne pour exemple

$$x^z + z^x = a, \quad x^x + z^z = b.$$

Il demande qu'on trouve les valeurs des inconnues, mais sans intersections de lignes : cette question n'est pas encore résolue.

Ce qui précède est extrait de l'ouvrage suivant : *Leibnizens mathematische schriften herausgegeben von* C.-I. Gerhardt.

Ecrits mathématiques de Leibniz, édités par C.-I. Gerhardt, t. II et VIII. Berlin, 1850.

Cet ouvrage fait partie des OEuvres de Leibniz, tirées des manuscrits de la Bibliothèque de Hanovre, et publiées par Georges-Henri Pertz.

Le premier volume contient la correspondance avec Hugens et le marquis de l'Hospital.

Leibniz avait été envoyé à Paris en 1672, avec une mission politique de l'électeur de Mayence auprès de Louis XIV, et il resta à Paris jusque vers la fin de 1676. Il s'y lia avec Hugens, auquel il soumettait tous ses travaux et dont il reçut aussi des instructions. Leibniz s'est, en plusieurs occasions, proclamé le *disciple* de Hugens. Cette correspondance a commencé à Paris même, résidence de Hugens après qu'il fut devenu membre de l'Académie, et n'a cessé qu'à sa mort (8 juillet 1695). Lors du retour de Leibniz en Allemagne, en 1676, la correspondance paraît avoir été interrompue pendant quelques années, et a été reprise en septembre 1679.

Dans ces Lettres, Leibnitz signe constamment Leibniz, et Huyghens signe Hugens. Dans une Lettre, Hugens se plaint (page 41) de ce que les rédacteurs des *Acta eruditorum* l'ont qualifié *Dynasta in Zulichem;* il demande cette rectification : *Dynasta in Zeelhem.*

Hugens éprouve d'abord de la répugnance à admettre le nouveau calcul, dont il croit pouvoir se passer; mais il finit par en reconnaître la toute-puissance. Il a de la peine à comprendre le d^2x, et demande des explications que Leibniz donne par la théorie des osculations.

Hugens servait d'intermédiaire entre Leibniz et Fatio de Duiller, géomètre genevois de grand mérite; il leur proposait des problèmes que Leibniz résolvait par son instrument avec facilité et complétement, tandis que Fatio était souvent arrêté ou ne donnait que des solutions incomplètes. Cela suffit pour nous expliquer l'animosité de Fatio, qui, lié depuis avec Newton, a soulevé contre Leibniz cette accusation de plagiat dont la fausseté est aujourd'hui victorieusement démontrée; mais il faut reconnaître que Leibniz ramenait toutes les questions aux quadratures, et qu'il ne résolvait celles-ci que par des séries : le calcul intégral est, à vrai dire, la création des Bernoulli; car l'Analyse des infiniment petits, de l'Hospital (1696), le premier Traité didactique, contient le calcul différentiel et ne renferme rien sur la *méthode inverse des tangentes*.

Leibniz demande l'avis de Hugens sur son *Codex Juris gentium*. Hugens refuse en ces termes : « Le peu d'attachement et d'estime que j'ay *per queste canzoni politiche* (comme le P. Paolo les appeloit) me tient hors du commerce pour tout ce qui les regarde, et je souffre mesme avec peine qu'un esprit comme le vostre y emploie du temps » (page 162).

Leibniz répond : « En vérité, je m'accommoderois davantage de ce qui est de vostre goust, si j'en avois absolument le choix, et j'estime plus les vérités éternelles qui éclairent l'esprit, que les faits ou les vérités temporelles. Il faut cependant avouer qu'encore en matières de droit, de morale et de politique, on pourroit faire des découvertes et des raisonnements exacts. Et souvent on y manque en pratique, parce qu'on a coustume de les traiter superficiellement. » Cette dernière observation est d'une grande justesse : parmi ceux qui s'occupent de ces matières, les esprits superficiels sont en immense majorité.

VALEUR DE L'ANNÉE TROPIQUE EN JOURS SOLAIRES MOYENS, ET RAPPORT DU JOUR MOYEN AU JOUR SIDÉRAL;

PAR M. CH. FORESTIER,
Professeur au Lycée de Metz.

Soient x la durée du jour moyen en jour sidéral, a la durée de l'année tropique en jours sidéraux, et δ la rétrogradation des équinoxes en une année.

En un jour sidéral, la Terre effectue une rotation de 360 degrés. Dans le même temps, le Soleil fictif, dont le mouvement uniforme sur l'équateur détermine le jour moyen, parcourt $\dfrac{360^\circ - \delta}{a}$, puisque, dans a jours sidéraux, il parcourt $360^\circ - \delta$. Donc, dans le temps x, la rotation de la Terre sera $360 . x$, et celle du Soleil moyen $\dfrac{360 - \delta}{a} \cdot x$. Le premier arc surpassant le second de 360 degrés, on a

$$360 . x = 360 + \frac{360 - \delta}{a} x,$$

d'où

$$(1) \qquad x\left(a - 1 + \frac{\delta}{360}\right) = a;$$

a jours sidéraux donnent l'année tropique, donc

$$1^{\text{ann. trop.}} = \left(a - 1 + \frac{\delta}{360}\right)^{\text{jours sol. moy.}}.$$

En prenant

$$a = 366,242226 \quad \text{et} \quad \delta = 50'',1,$$

on a

$$\frac{\delta}{360} = 0,0000386 \quad \text{et} \quad 1^{\text{ann. trop.}} = 365^{\text{j. sol. moy.}},2422646.$$

En faisant $\delta = 0$, on aurait la valeur de l'année tropique, dans le cas où il n'y aurait pas de précession des équinoxes,

$$1^{\text{ann. trop.}} = (a - 1)^{\text{j. sol. moy.}}.$$

La relation (1) fournit la valeur du jour moyen en jour sidéral

$$x = \frac{a}{a - 1 + \frac{\delta}{360}}.$$

Note du Rédacteur.

On ne peut mesurer le temps qu'à l'aide d'un mouvement uniforme; on ne peut savoir si un mouvement est uniforme qu'en le comparant à un autre mouvement uniforme· ceci implique une chaîne indéfinie de conditions; par conséquent, la constatation rigoureuse d'un mouvement uniforme est impossible (*). Toutefois, en mécanique céleste on admet que la rotation de la Terre est un mouvement circulaire uniforme. Depuis un grand nombre de siècles, dans une infinité d'applications, cette

(*) L'égalité de deux longueurs est une idée certaine et *claire;* car on peut superposer ces longueurs : ce moyen n'existe pas pour des temps *égaux*. Aussi l'égalité de deux temps est une idée certaine, mais *obscure*, qu'on embrouille en voulant l'éclaircir, ainsi que cela arrive toujours pour ce genre d'idées. L'illustre sir W. Hamilton a fondé sur la notion du *temps pur*, la métaphysique des signes et des opérations algébriques; conception kantiste d'importation difficile, que j'essayerai peut-être, à tout hasard hypothèse n'a donné aucun résultat inexact; donc cette hypothèse, sous le point de vue physique, équivaut à une certitude. La durée d'une rotation constitue le jour sidéral.

L'année sidérale est la durée d'une révolution de la Terre autour du Soleil. Le nombre de jours sidéraux compris dans une année sidérale est irrationnel : il est compris entre 366 et 367. Une longue suite d'observations ont appris que ce nombre est sensiblement égal à 366,25638; autrement 100 000 années sidérales comprennent à peu près 36625638 jours sidéraux; de sorte que si l'étoile α était dans le méridien supérieur au commencement d'une année sidérale, elle y sera encore à peu près au bout de la 100000[e] année sidérale, et y aura paru dans cet espace de temps 36925638 fois.

On conclut aussi par observation que, dans ce même intervalle de temps, le Soleil paraîtra 36525638 fois dans le méridien supérieur. On appelle *jour solaire* l'intervalle de temps entre une apparition du Soleil dans le méridien supérieur et l'apparition suivante; ainsi, dans le même espace de temps, on a 36625638 apparitions méridiennes sidérales et 36525638 apparitions solaires; les jours solaires sont inégaux. La longueur moyenne d'un tel jour est donc exprimée par le nombre fractionnaire $\frac{36625638}{36525638} = 1,0027378$ jour sidéral. Cette longueur moyenne du jour solaire, déduite de l'année sidérale, n'est pas en usage, parce que les calculs astronomiques se rapportent à l'année équinoxiale.

L'année équinoxiale est la durée de temps que met la Terre à aller d'un équinoxe vernal à l'équinoxe vernal suivant. Le nombre de jours sidéraux renfermés dans cette année est aussi irrationnel; l'observation donne 366,24222. Autrement, dans 100 000 années tropiques, il s'écoule 36624222 jours sidéraux à peu près. Le nombre de fois que, dans ce même intervalle, le Soleil paraît dans le méridien supérieur est 36524222; de sorte que la longueur moyenne du jour solaire, déduite de l'année tropique, est $\frac{36624222}{36524222} = 1,00273790$.

Ainsi un jour solaire moyen vaut 1,002737 jour sidéral : c'est le rapport adopté; il s'accorde jusqu'à la sixième décimale avec le rapport déduit de l'année sidérale.

Pendant une année sidérale, la Terre décrit sur la sphère céleste 360 degrés; dans une année équinoxiale, qui est moindre que l'année sidérale, la Terre décrit moins de 360, soit $360^\circ - \delta$. On trouve δ d'une manière approchée à l'aide de cette proportion :

$$36625638 : 36624222 :: 360 : 360 - \delta;$$

de là

$$\delta = 50'',1;$$

c'est la précession des équinoxes que l'on déduit de la longueur de l'année tropique, mais non celle-ci de la précession des équinoxes. Ce n'est que la comparaison des longueurs des années équinoxiales et sidérales qui fait connaître la précession, et qui a sa cause dans la surface épicycloïdale que des forces perturbatrices font décrire à l'axe terrestre. On sait, d'ailleurs, que l'équinoxe est un point de l'orbite où la tangente à cette orbite est la projection orthogonale de l'axe de la Terre (*).

On comptait autrefois l'année d'un solstice d'hiver au solstice d'hiver suivant; de là le nom d'*année tropique*, conservé improprement pour désigner l'année équinoxiale.

(*) A cause de la nutation, la précession varie de 33″ à 67″.

La longueur de l'année tropique, à cause des forces perturbatrices, est variable. Voici la formule de Bessel :

$$\text{année tropique} = 365,2422203 - t\,0,0000006686;$$

$t =$ années écoulées depuis 1800.

D'après cette formule, la longueur de l'année tropique 1854 est 365,2422166.

DIVISION PRATIQUE DE LA CIRCONFÉRENCE EN PARTIES ÉGALES

(voir t. XII, p. 245);

PAR M. TEMPIER,
Sous-Directeur des Écoles chrétiennes à Montpellier.

La pratique que j'ai indiquée s'applique également à un nombre impair de parties égales (*). Car il suffit de considérer la manière dont on obtient la formule fondamentale

$$\sin\delta = \frac{12n + \sqrt{48n^2 - 512}}{3n^2 + 16},$$

pour se convaincre que cette formule est vraie pour un nombre entier positif n quelconque. Toutefois, l'énoncé du procédé doit être modifié ainsi :

« Après avoir divisé le diamètre en n parties égales, » on prendra, à partir de ce centre, une longueur égale » à deux fois le quotient, que n soit pair ou impair. »

(*) On trouve cette pratique dans la *Géométrie* de M. Catalan. TM

GRAND CONCOURS DE 1854

(voir t. XII, p. 314).

CLASSE DE LOGIQUE,

SECTION DES SCIENCES.

1°. Dans tout tétraèdre, on peut considérer, pour chaque arête, 1° l'angle dièdre des deux faces qui se coupent suivant cette arête; 2° les inclinaisons de cette même arête sur chacune des deux autres faces auxquelles elle se termine: ce qui, pour les six arêtes considérées simultanément, donne en tout *dix-huit* angles. On propose de démontrer que la somme de ces *dix-huit* angles est *constante* et égale à *douze* angles droits dans tout tétraèdre, où les arêtes opposées sont perpendiculaires entre elles, c'est-à-dire dans tout tétraèdre où les angles qu'on formerait en considérant les trois couples d'arêtes, qui ne se rencontrent pas, et menant, par un point quelconque de l'espace, des parallèles aux arêtes de chaque couple, seraient trois angles droits.

2°. Dans tout tétraèdre, quand, sur les six arêtes, il y en a deux qui sont respectivement perpendiculaires aux deux arêtes qui leur sont opposées, on propose de démontrer que les deux arêtes restantes sont aussi perpendiculaires l'une sur l'autre (*).

3°. Démontrer que, dans un tétraèdre où chaque arête est perpendiculaire à son opposée, les quatre hauteurs se rencontrent en un même point.

Observation. C'est une classe de logique. Il me semble que la logique exige qu'on démontre la possibilité de

(*) *Dans tout tétraèdre... on propose de démontrer*.. Est-ce français?

l'objet avant d'en démontrer les propriétés. Un tel tétraèdre existe-t-il? Il fallait commencer par démontrer qu'on peut construire un tétraèdre où deux couples d'arêtes opposées représentent chacun un angle droit; que, dans un tel tétraèdre, le troisième couple d'arêtes figure aussi un angle droit; puis, etc. Pourquoi donner une forme illogique à une question de logique?

Le *c'est-à-dire* suppose que les élèves parisiens admis au grand Concours ignorent que deux droites peuvent être à angle droit sans se rencontrer; supposition très-honorable pour ces élèves, pour leurs professeurs, et, en général, pour notre *alma mater parisiensis*. Au total, c'est une bonne question à proposer, pendant le courant de l'année, dans l'intérieur d'un collége : mais au grand concours ?

Si je commettais de semblables questions, *coram populo,* pour ne laisser peser aucun soupçon sur autrui, je regarderais comme une nécessité d'honneur de me nommer.

Mathématiques spéciales.

On sait et l'on démontre aisément que, si un cercle roule intérieurement sur la circonférence d'un autre cercle d'un rayon double, la ligne décrite par un point de la première circonférence est un diamètre de la seconde, et l'on a fait d'intéressantes applications de cette propriété aux arts industriels. On propose d'examiner le cas où le point décrivant est situé sur un rayon du cercle mobile, en dedans ou en dehors de sa circonférence; on déterminera la nature de la courbe que ce point décrit (*).

Observation. Cette belle propriété, qui remonte à la Hire, triturée dans tous les Cours, dans tous les Traités,

(*) Les élèves ayant déclaré connaître le lieu demandé, la lecture de la question n'a pas été achevée. Nous en donnerons la fin. Cette déclaration est la partie estimable, le côté moral du concours. Honneur aux élèves!

est universellement connue ; les *arts industriels*, amenés si à propos, ont excité une grande hilarité dans l'assemblée des élèves. Aussi a-t-on été obligé, comme l'année dernière, à retirer cette question et on l'a remplacée par la suivante :

QUESTION. *Démontrer le théorème suivant relatif à l'hyperbole.*

Si l'on prend pour diamètre d'un cercle la portion de l'axe non transverse comprise entre le centre et la normale en un point quelconque de la courbe, la tangente menée au cercle par ce dernier point est égale au demi-axe réel.

Résoudre, d'après cela, la question suivante :

Étant donnés les deux sommets et un troisième point quelconque de l'hyperbole, construire la normale en ce point.

Indiquer les propriétés et les constructions analogues pour l'ellipse.

Observation. Cela découle immédiatement de cette propriété des courbes à centre : le produit de la distance du centre à une tangente par la portion de la normale terminée à l'un quelconque des axes est égal au carré de l'autre demi-axe ; propriété qu'on lit et qu'on démontre dans tous les Traités anciens et nouveaux de géométrie analytique (par exemple *Cirodde*, page 410) (*).

Nous sommes forcés de supprimer les réflexions que nous inspire la comparaison de ce Concours avec celui de 1850 (*voir* tome IX, page 282).

O. TERQUEM.

(*La fin prochainement.*)

(*) Il n'y a même pas besoin de ce théorème : il suffit d'écrire l'équation de la normale, etc. Il y en a pour dix minutes, et les élèves sont en conclave pendant dix heures !

NOTE SUR UN THÉORÈME DE DESCARTES. COURBE ROULANT SUR UNE AUTRE;

Par M. F. FRENET,

Professeur à la Faculté de Lyon.

Si l'on fait rouler dans un plan une courbe mobile A sur une courbe fixe B, les positions successives d'un point μ, invariablement lié à A, déterminent une ligne courbe dont la normale en chaque point va passer par le point de contact m des courbes A et B. On sait que ce théorème, dû à Descartes, s'établit très-simplement par la géométrie en assimilant les courbes à des polygones; en voici une démonstration analytique assez courte.

Rapportons la courbe fixe B à des axes rectangulaires (*). Soient $t'mt$ la tangente commune; x, y les coordonnées du point de contact m; ξ, η celles du point μ. La longueur $\mu m = r$ et l'angle θ que fait sa direction avec une droite quelconque, invariablement liée à A, constituent un système de coordonnées polaires auquel on peut concevoir que sont rapportés les points de cette courbe. Cela posé, de l'équation évidente

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = r^2$$

on tire par la différentiation

$$(\mathrm{A})\quad \frac{x-\xi}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{y-\eta}{r}\frac{dy}{ds} - \left(\frac{x-\xi}{r}\frac{d\xi}{ds} + \frac{y-\eta}{r}\frac{d\eta}{ds}\right) = \frac{dr}{ds},$$

ds représentant l'élément de la courbe B.

(*) Le lecteur est prié de tracer la figure.

Or l'angle $t\,m\mu$ formé par le rayon vecteur μm et la direction mt' a pour cosinus la quantité $\frac{dr}{ds}$; d'un autre côté, ce cosinus est aussi égal à

$$\frac{x-\xi}{r}\frac{dx}{ds}+\frac{y-\eta}{r}\frac{dy}{ds}:$$

il résulte de là que l'équation (A) peut se ramener à la forme

$$\frac{y-\eta}{x-\xi}\frac{d\eta}{d\xi}+1=0,$$

qui démontre le théorème énoncé.

J'ajouterai ici une observation, très-connue sans doute, mais que je n'ai pas vue consignée dans les ouvrages où elle devrait se trouver. On sait qu'on parvient à la notion du centre instantané de rotation en donnant à une figure, dans son plan, deux positions différentes, et montrant qu'on peut toujours l'amener de l'une à l'autre par une rotation convenable autour d'un point fixe. Les deux positions de la courbe sont ordinairement supposées infiniment voisines, mais il est manifeste que c'est là une restriction inutile.

Remarquons, en effet, que le théorème dont il s'agit revient à celui-ci : *Étant données deux droites* AB, A′B′ *égales et situées d'une manière quelconque dans le même plan, il existe toujours un point* M *tel qu'on a*

$$\text{MA}=\text{MA}',\quad \text{angle MAB}=\text{angle MA}'\text{B}'.$$

Or, pour trouver ce point, il suffit d'élever des perpendiculaires sur le milieu des droites AA′, BB′; le point de rencontre est celui qu'on cherche. On y parvient aussi en prolongeant les droites données jusqu'à leur point de rencontre C, et circonscrivant un cercle au triangle ACA′; la perpendiculaire élevée sur le milieu de AA′ rencontre la circonférence en deux points dont l'un convient toujours. Cette dernière construction est souvent préférable à la première. Elle montre immédiatement que, lorsqu'une courbe mobile *glisse* infiniment peu sur une courbe fixe, le centre instantané de rotation est au centre de courbure de la ligne fixe, et qu'il se confond avec le point de contact quand la courbe mobile *roule* sans glisser. On retrouve ici le théorème de Descartes.

SUR LA SOMME DES PROGRESSIONS GÉOMÉTRIQUES INFINIES;

Par M. EUZET,

Garde du Génie, à Toulon.

Trouver la somme des termes de la progression infinie par quotient

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots$$

Soit à partager l'unité en 3 parties égales, on pourra opérer ainsi : Divisez d'abord l'unité en 4 parties, et isolez 3 portions de $\frac{1}{4}$ chacune; divisez le $\frac{1}{4}$ restant en 4 parties, égales par conséquent à $\frac{1}{4^2}$, et placez une de ces parties à côté de chacune des 3 autres; vous aurez

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2},$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2},$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2},$$

il vous restera $\frac{1}{4^2}$ que vous diviserez et distribuerez de la même manière, et ainsi de suite. Cette opération étant continuée à l'infini, l'unité que vous aviez d'abord se trouvera entièrement partagée et formera 3 lots égaux chacun à

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots;$$

par suite, chaque lot, ou la somme des termes de la progression donnée, sera égale à $\frac{1}{3}$.

Il est aisé de voir que, pour toute autre progression dont la raison serait une fraction différente, mais ayant l'unité pour numérateur, il suffira de retrancher 1 du dénominateur pour avoir la somme des termes de la progression correspondante.

Si tous les termes de la progression étaient multipliés par le même nombre, il faudrait évidemment multiplier le résultat ci-dessus par le nombre constant, ce qui ne change rien à la règle établie.

Cette règle étant appliquée à une fraction décimale périodique, on trouve que la valeur de cette fraction est égale à la période divisée par un nombre composé d'autant de 9 que cette période a de chiffres.

Trouver la somme des termes d'une progression infinie par quotient, la raison étant une fraction quelconque proprement dite.

Soit, pour fixer les idées, la progression

$$\frac{3}{5}+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^3}{5^3}+\ldots.$$

Le numérateur de la fraction génératrice étant

$$1+1+1,$$

les $\frac{3}{5}$ de ce numérateur seront composés de 3 parties

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}.$$

Les $\frac{5}{5}$, ou le numérateur entier, vaudra 5 de ces parties, ou

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}.$$

Retranchant et plaçant à part 2 de ces parties, c'est-à-dire

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\right),$$

nous aurons un premier reste égal à

$$\frac{3}{5}+\frac{3}{5}+\frac{3}{5}.$$

Les $\frac{3}{5}$ de ce reste étant

$$\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2},$$

les $\frac{5}{5}$ seront

$$\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}.$$

Plaçant à part, comme ci-dessus, 2 parties ou bien

$$\left(\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}\right),$$

nous aurons un deuxième reste égal à

$$\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}.$$

Opérant sur ce reste comme sur le précédent, nous pourrons mettre de côté les deux nouvelles fractions

$$\left(\frac{3^3}{5^3}+\frac{3^3}{5^3}\right),$$

et avoir le troisième reste

$$\frac{3^3}{5^3}+\frac{3^3}{5^3}+\frac{3^3}{5^3};$$

mais comme ceux-ci vont sans cesse en décroissant, il est visible qu'à l'infini le dernier sera nul; dès lors, le numérateur 3 de la fraction génératrice se trouvant entièrement décomposé dans la série

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^2}\right)+\left(\frac{3^3}{5^3}+\frac{3^3}{5^3}\right)+\ldots,$$

série évidemment égale à 2 fois

$$\left(\frac{3}{5}+\frac{3^2}{5^2}+\frac{3^3}{5^3}+\ldots\right),$$

il en résulte que la somme des termes de cette dernière progression, identique avec la proposée, est égale à $\frac{3}{2}$.

Il est aisé de voir que la somme des termes de toute autre progression semblable est égale au numérateur de la fraction génératrice divisé par la différence des deux termes de cette fraction.

NOTE SUR UN THÉORÈME SUR LE CONE SPHÉRIQUE ATTRIBUÉ A MAC-CULLAGH

(voir p. 99).

1. Désignons par s et p respectivement l'aire et le pé-

rimètre d'un polygone sphérique ; et désignons de même par s' et p' l'aire et le périmètre du polygone *supplémentaire*. On sait que l'on a

$$s+p'=s'+p=2\pi\,;$$

or, prenant le rayon de la sphère pour unité, p est le double de l'aire latérale du cône concentrique à la sphère qui a p pour contour de la base ; donc l'aire de la base d'un polygone sphérique plus le double de l'aire latérale du cône supplémentaire est égale à l'aire de la moitié de la sphère ; cette proposition existe évidemment pour une courbe sphérique quelconque. Le théorème assigné à Mac-Cullagh se rapportant à l'ellipse sphérique, n'est donc qu'un cas particulier d'un théorème général très-élémentaire.

On doit à M. Chasles quatre beaux théorèmes sur les coniques *homofocales* sphériques (*Comptes rendus*).

THÉORÈME SUR LES DÉTERMINANTS DE M. SYLVESTER.

Soient les déterminants

λ;	$\lambda\ 1$;	$\lambda\ 1\ 0$;	$\lambda\ 1\ 0\ 0$;	$\lambda\ 1\ 0\ 0\ 0$;	$\lambda\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0$;
	$1\ \lambda$;	$2\ \lambda\ 2$;	$3\ \lambda\ 2\ 0$;	$4\ \lambda\ 2\ 0\ 0$;	$5\ \lambda\ 2\ 0\ 0\ 0$;
		$0\ 1\ \lambda$;	$0\ 2\ \lambda\ 3$;	$0\ 3\ \lambda\ 3\ 0$;	$0\ 4\ \lambda\ 3\ 0\ 0$;
			$0\ 0\ 1\ \lambda$;	$0\ 0\ 2\ \lambda\ 4$;	$0\ 0\ 3\ \lambda\ 4\ 0$;
				$0\ 0\ 0\ 1\ \lambda$;	$0\ 0\ 0\ 2\ \lambda\ 5$;
					$0\ 0\ 0\ 0\ 1\ \lambda$;

la loi de formation est évidente ; effectuant, on trouve

$$\lambda;\quad \lambda^2-1^2;\quad \lambda[\lambda^3-2^2];\quad (\lambda^2-1^2)(\lambda^2-3^2);\quad \lambda[\lambda^2-2^2][\lambda^2-4^2];$$
$$(\lambda^2-1^2)(\lambda^2-3^2)(\lambda^2-5^2);\quad \lambda(\lambda^2-2^2)(\lambda^2-4^2)(\lambda^2-6^2);$$

et ainsi de suite.

SOLUTION DE LA QUESTION 260

(voir t. IV, p. 577, et t. XI, p. 368);

Par M. L. PAINVIN,
Licencié ès Sciences Mathématiques.

Trouver l'équation de la courbe qui coupe, sous un angle constant, toutes les génératrices d'un cône du second degré.

Tout cône du second degré pouvant être regardé comme un cône droit à base elliptique, l'équation générale des cônes du second degré sera

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

En un point (x, y, z), l'angle formé par la génératrice et la tangente sera

$$\frac{x}{r}\cdot\frac{dx}{ds} + \frac{y}{r}\cdot\frac{dy}{ds} + \frac{z}{r}\cdot\frac{dz}{ds},$$

et l'on devra avoir

$$(2) \qquad \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r\,ds} = m,$$

m étant une constante égale au cosinus de l'angle des deux droites r et ds.

Or nous avons

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{r} = dr,$$

donc

$$\frac{dr}{ds} = m;$$

c'est-à-dire que si l'on s'avance sur la courbe cherchée, les rayons vecteurs sont proportionnels aux accroissements des arcs. Et réciproquement, si cette proportionnalité a lieu, l'angle de la tangente et du rayon vecteur est constant. Partons de cette propriété, et employons les coordonnées sphériques

$$(3)\qquad \begin{cases} dr^2 = m^2\, ds^2, \\ ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2, \end{cases}$$

les formules de transformation étant

$$(4)\qquad \begin{cases} x = r\sin\theta.\cos\varphi, \\ y = r\sin\theta.\sin\varphi, \\ z = r\cos\theta, \end{cases}$$

r étant le rayon vecteur, φ l'angle de la projection de ce rayon vecteur sur le plan des xy avec l'axe des x, θ l'angle de ce rayon vecteur avec l'axe des z.

Substituons ces valeurs dans l'équation (1); les équations de la courbe cherchée seront

$$(5)\qquad \frac{r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} - \frac{r^2\cos^2\theta}{c^2} = 0,$$

$$(6)\qquad dr^2 = m^2 (dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Éliminant θ et sa différentielle, on obtient

$$(7)\quad \frac{dr}{r} = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \cdot \frac{abd\varphi \sqrt{[a^2 b^2 + c^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) + c^2(b^2-a^2)\sin^2\varphi]}}{[a^2 b^2 + c^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)]\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}.$$

Les équations (5) et (7) seront donc les équations de la courbe cherchée.

Discussion de l'équation (7).

Nous avons trouvé

$$\frac{dr}{r} = \pm \frac{m.ab.d\varphi}{\sqrt{1-m^2}\,[a^2 b^2 + c^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)]}$$
$$\times \sqrt{\frac{[a^2 b^2 + c^2(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)](a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) + c^2(b^2-a^2)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{dr}{r} = \pm \dfrac{mabd\varphi}{\sqrt{1-m^2}\,[b^2(a^2+c^2)+c^2(a^2-b^2)\sin^2\varphi]} \\ \times\sqrt{\dfrac{b^4(a^2+c^2)+(a^2-b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\sin^2\varphi}{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\varphi}}. \end{cases}$$

Or l'intégrale de cette équation dépend des fonctions elliptiques, et l'on trouve que

$$l.r = \mathrm{K}[\mathrm{M}\Pi(\mathrm{A}, e, \omega) + \mathrm{N}\mathrm{F}(e, \omega)],$$

c'est-à-dire que le logarithme de r dépend d'une fonction elliptique de troisième espèce et d'une fonction elliptique de première espèce; K, M, N sont des coefficients constants.

Posons

$$k = \frac{mab}{\sqrt{1-m^2}},$$

$$\Phi = \int \frac{d\varphi}{[b^2(a^2+c^2)+c^2(a^2-b^2)\sin^2\varphi]}$$
$$\times\sqrt{\frac{b^4(a^2+c^2)+(a^2-b^2)(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)\sin^2\varphi}{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\varphi}}.$$

Si nous prenons l'intégrale à partir de $\varphi = 0$, et $r = 1$ pour cette valeur de φ, la constante arbitraire est nulle, et nous aurons

$$(9)\qquad r = c^{\pm k\Phi}.$$

Premier cas. Si $m > 0$, m est le cosinus de l'angle de la tangente avec la génératrice.

I. $a > b$. Prenons d'abord le signe $+$.

Si nous faisons croître φ de o à $+\infty$ (comptons les arcs positifs en allant de l'axe des x positifs vers l'axe des y positifs), l'élément de l'intégrale reste toujours positif, donc Φ croît en même temps, et il croît indéfiniment.

En effet,

$$\Phi > \frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}} \int_0^{\varphi} d\varphi + \frac{b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \int_{\varphi}^{h} d\varphi ;$$

on voit facilement que $a\sqrt{b^2 - c^2}$ est la plus petite valeur de la fonction qui est sous le signe $\int$: donc, en prenant φ suffisamment grand,

$$\Phi > \frac{b\varphi}{\sqrt{a^2 + c^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}} (h - \varphi),$$

la première partie est une quantité finie, la seconde partie croît indéfiniment avec h; donc, lorsque φ croît de o à ∞, Φ croît aussi de o à ∞, et par conséquent r croît de 1 à ∞, c'est-à-dire la courbe s'enroule sur le cône, en allant de l'axe des x positifs vers l'axe des y positifs. Maintenant, faisons décroître φ de o à $-\infty$; Φ décroîtra de o à $-\infty$, et r décroîtra depuis l'unité jusqu'à zéro; donc la courbe s'enroule sur le cône en allant des x positifs vers les y négatifs, en se rapprochant indéfiniment du sommet du cône, qui est pour ainsi dire un point asymptotique.

Si l'on cherche la projection de cette courbe sur le plan des xy, ρ étant son rayon vecteur, on a

$$(10) \quad \rho = r \sin\theta = \frac{abe^{+k\Phi}}{\sqrt{b^2(a^2 + c^2) + c^2(a^2 - b^2)\sin^2\varphi}}.$$

Cette courbe est une spirale dont l'origine est un point asymptotique, et qui se développe dans le même sens que la courbe dont elle est la projection.

Si l'on cherche l'angle de la tangente avec le rayon vecteur, on aura l'angle de la projection de la tangente à la courbe avec la projection de la génératrice qui passe en ce point considéré, et l'on voit que lorsque φ varie de o à $\frac{\pi}{2}$, de $\frac{\pi}{2}$ à π, la tangente trigonométrique de cet angle va de $\frac{\sqrt{a^2+c^2}\sqrt{1-m^2}}{ma}$ à $\frac{\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{1-m^2}}{mb}$, puis de cette dernière valeur à la première, et ainsi de suite, elle ne passe jamais ni par zéro ni par l'infini; l'expression de cette tangente est

$$(11)\quad \operatorname{tang}\mu = \frac{[b^2(a^2+c^2)+c^2(a^2-b^2)\sin^2\varphi]\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\varphi}}{k\sqrt{b^4(a^2+c^2)+(a^2-b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\sin^2\varphi-c^2(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\sin}}}$$

Si l'on prend le signe —, les mêmes résultats se retrouveront dans un ordre inverse.

II. Cône de révolution. $a=b$. Dans ce cas Φ est intégrable, et l'on trouve

$$(12)\qquad r = e^{\pm\frac{k}{a\sqrt{a^2+c^2}}\varphi}.$$

La discussion est facile, et donne des résultats analogues aux précédents.

La projection de la courbe a pour équation

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{a^2+c^2}}e^{\pm\frac{k}{a\sqrt{a^2+c^2}}\varphi}.$$

C'est une spirale logarithmique.

Dans ce cas,

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{ma}\sqrt{1-m^2} = \text{const.};$$

donc la projection de la tangente fait aussi un angle constant avec la projection de la génératrice; propriété qui pouvait d'ailleurs se déduire de ce que la projection de la courbe est une spirale logarithmique.

III. Si $a < b$, on voit que dans Φ les radicaux ne deviennent ni nuls, ni imaginaires, quelque valeur que l'on donne à φ; la quantité qui est en dehors du radical ne peut non plus devenir ni nulle, ni négative; donc la marche suivie pour le premier cas est applicable ici, et l'on arrive à des résultats analogues.

Deuxième cas. $m < 0$, en mettant en évidence le signe

$$r = e^{\pm k\Phi}.$$

La discussion est la même que pour le premier cas; on trouvera des résultats inverses.

Troisième cas. $m = 0$, c'est-à-dire si la tangente doit être perpendiculaire à la génératrice; alors

$$k = 0, \quad r = 1,$$

c'est-à-dire, la courbe cherchée est donnée par l'intersection du cône avec une sphère de rayon 1 ayant son centre à l'origine : c'est donc une *conique sphérique*.

Quatrième cas. Si

$$m = 1, \quad k = \infty,$$

alors

$$r = \infty \quad \text{ou} \quad r = 0;$$

c'est-à-dire que dans ce cas il n'y a pas de courbe, ou elle se réduit au sommet du cône.

Rectification de la courbe.

$$dr = m ds;$$

donc

$$s = \frac{r - 1}{m},$$

en comptant les arcs à partir du point où l'on a

$$\varphi = 0 \quad et \quad r = 1,$$

que je désignerai par A ; d'où

$$s = \frac{e^{\pm k\Phi} - 1}{m}.$$

Premier cas. On voit, si l'on prend le signe +, que la longueur de la courbe croît indéfiniment à partir de A, en s'élevant sur le cône ; et sa longueur, depuis le point A jusqu'au sommet du cône, est égale à $\frac{1}{m}$.

Cette expression de s n'est intégrable que dans le cas où $a = b$.

Deuxième cas. Si

$$m = 1, \quad r = \infty \quad \text{ou} \quad r = 0,$$

alors

$$s = \infty \quad \text{ou} \quad s = 1,$$

ce que l'on pouvait prévoir.

Troisième cas. Si $m = 0$, la formule ci-dessus donne l'indétermination ; alors on a recours aux équations de la courbe

$$r = 1, \qquad \frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} = \frac{\cos^2\theta}{c^2};$$

et l'on trouve

$$ds = \frac{abd\varphi}{[b^2(a^2+c^2) + c^2(a^2-b^2)\sin^2\varphi]}$$
$$\times\sqrt{\frac{b^4(a^2+c^2) + (a^2-b^2)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\sin^2\varphi}{b^2+(a^2-b^2)\sin^2\varphi}},$$

qui n'est intégrable que dans le cas où $a = b$; on a alors

$$s = \frac{a\varphi}{\sqrt{a^2 + c^2}};$$

la constante est nulle si $s = 0$ pour $\varphi = 0$.

La longueur de la courbe croît proportionnellement aux arcs.

Même question pour les cylindres dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Dans les cylindres à base elliptique ou hyperbolique, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ sont les cosinus des angles de la tangente en un point (x, y, z) avec les axes ; $0, 0, 1$ sont les cosinus des angles de la génératrice avec les axes ; on a donc

$$dz = m\,ds,$$

m étant une constante.

Pour un calcul facile, on arrive aux équations de la courbe

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$(2) \qquad z = \pm \frac{m}{a\sqrt{1 - m^2}} \int_0^x \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx.$$

Si a est différent de b, cette intégrale dépend des fonctions elliptiques.

Dans le cas du cylindre elliptique, la condition nécessaire et suffisante pour que les radicaux restent réels, est que x soit $< a$.

La discussion se ferait comme dans le cas précédent.

Dans le cas de $a = b$, on retrouve les équations de l'hélice.

Dans le cas de $m = 0$, on trouve une série d'ellipses égales et parallèles à celle de la base.

Le cas de $m = 1$ ne donne aucune courbe, ce qu'on pouvait prévoir.

Pour le cylindre à base hyperbolique, il faudra changer dans les résultats précédents b^2 en $-b^2$.

La condition nécessaire et suffisante pour que les radicaux soient réels, est que x soit toujours $> a$.

Le cas de $a = b$ donne une intégrale qui dépend des fonctions elliptiques.

Le cas de $m = 0$ donne une série d'hyperboles égales et parallèles à celle de la base.

Pour le cylindre à base parabolique, les équations de la courbe seront

$$(1) \qquad y^2 = 2px,$$

$$(2) \quad z = \pm \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\left[\sqrt{x(p+2x)} - \frac{p}{\sqrt{2}}\, l\left(\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{p+2x}}{\sqrt{p}}\right)\right].$$

Observations. M. Faure résout cette question à peu près de la même manière, sans discussion.

QUESTIONS.

293. Soient p un nombre premier et X un polynôme tel que

$$X = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_n x^{n-1}.$$

En donnant à chaque coefficient a toutes les valeurs

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots,\ p-1,$$

on aura p^n valeurs de X, dont l'une sera zéro. Si l'on élève toutes les valeurs de X à la puissance m, et qu'on représente la somme des résultats par $\sum X^m$, on aura

$$\sum X^m = \text{un multiple de } p,$$

si $m < p^n - 1$; mais l'égalité précédente n'aura pas lieu si $m = p^n - 1$. (J. A. Serret.)

294. Soient $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, n points matériels d'égales masses; G_2 le centre de gravité de P_1, P_2; G_3 le centre de gravité de P_3 et de la masse $P_1 + P_2$ posée en G_2; G_4 le centre de gravité de P_4 et de G_3, et ainsi de suite; de sorte que G_n est le centre de gravité de P_n et de G_{n-1}; G_n est indépendant de la manière dont on prend les masses; désignons par $A_{(i)}$ la distance de G_{i-1} à P_i, la quantité

$$\frac{1}{2}(A_2)^2 + \frac{2}{3}(A_3)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)(A_4)^2 + \ldots + \left(\frac{n-1}{n}\right) A_n^2$$

est constante, dans quelque ordre qu'on prenne les masses.

Observation. G_1 est la même chose que P_1: ainsi A_2 est la distance de P_1 à P_2. (Steiner.)

295. Par un point P pris dans le plan d'une courbe algébrique M, on mène des normales à cette courbe, qui la rencontrent aux points $A_1, A_2, \ldots, A_n$. On suppose que la somme des carrés de ces normales est égale à p^2, quantité constante. Le point P engendre une nouvelle courbe M_1; la normale à cette courbe menée par le point P passe par le centre de gravité des points A_1, A_2, etc.

Cherchons un point Q tel, que l'on ait

$$(QA_1)^2 + (QA_2)^2 + \ldots + QA_n = p^2.$$

Le lieu du point Q est une courbe M_2 touchant la courbe M_1 au point P.

Il en sera de même pour une relation quelconque entre les normales; dans la relation donnée, M_2 est un cercle.

SOLUTION DE LA QUESTION 282

(voir t. XII, p. 443);

PAR MM. JOSEPH SACCHI, de Pavie, et ANGELO GENOCCHI.

Soient a_r, b_r les coordonnées rectangles du $r^{\text{ième}}$ sommet du polygone de n côtés inscrit dans la parabole représentée par $y^2 = px$; A_r l'aire du triangle ayant ses sommets aux points de coordonnées a_1, b_1; a_r, b_r; a_{r+1}, b_{r+1}; l'aire du polygone sera $\sum_2^{n-1} A_r$. L'aire d'un triangle en fonction des coordonnées de ses sommets donne

$$(1)\qquad 2A_r = (b_r - b_1)(a_{r+1} - a_1) - (b_{r+1} - b_1)(a_r - a_1);$$

et comme les sommets du polygone sont sur la parabole, on aura

$$b_r^2 = pa_r, \quad b_{r+1}^2 = pa_{r+1}.$$

En substituant ces valeurs de a_r, a_{r+1} dans l'équation (1), on a

$$2pA_r = (b_r - b_1)(b_{r+1} - b_1)(b_{r+1} - b_r),$$

et l'aire du polygone sera

$$(2)\qquad \frac{1}{2p}\sum_2^{n-1}(b_r - b_1)(b_{r+1} - b_1)(b_{r+1} - b_r).$$

Si α_1, α_2, ..., α_r, ..., α_n sont les projections des sommets du polygone sur une perpendiculaire à l'axe de la parabole, l'équation (2) donne

$$\frac{1}{2p}\sum_{2}^{n-1} \alpha_1 \alpha_r . \alpha_1 \alpha_{r+1} . \alpha_r \alpha_{r+1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Note. M. Gilbert, de Louvain, donne la même démonstration, sauf la notation, et ajoute cette observation: De tous les polygones d'un même nombre de côtés inscrits dans le même arc de parabole, celui-là a l'aire maximum pour lequel $\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_2 \alpha_3 = \alpha_3 \alpha_4 = \ldots.$

M. Gérard, de Toulouse, donne aussi une solution qui ne diffère pas de celle de M. Gilbert.

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez Mallet-Bachelier, libraire, quai des Augustins, 55.

Thèses présentées à la Faculté des Sciences de Paris, pour obtenir le grade de Docteur ès sciences mathématiques; par *M. J. Garlin*, ancien élève de l'École Normale, professeur au lycée de Lyon. — Thèse de Mécanique : Sur les surfaces isothermes et orthogonales; — Thèse d'Astronomie : Sur les mouvements apparents; — soutenues le 4 juillet 1853. Paris, 1853. In-4° de 72 pages. Imprimerie de Mallet-Bachelier.

Ces thèses ne faisant partie d'aucun recueil scientifique, nous croyons utile d'en extraire les principaux résultats. Voici d'abord le résumé de la première.

1°. L'étude des surfaces isothermes coniques se ramène à celle des surfaces isothermes cylindriques, en prenant pour coordonnées la longitude φ et $\omega = \log \operatorname{tang} \frac{1}{2}\theta$, θ étant le complément de la latitude.

2°. Les trajectoires *quelconques* d'un système de courbes isothermes, planes ou sphériques, sont aussi isothermes. Ce théorème, connu seulement pour les trajectoires orthogonales, sert à résoudre le problème des trajectoires quelconques d'une série de courbes isothermes. L'auteur en fait diverses applications, et trouve que les lignes qui coupent sous l'angle α les cercles passant par deux points sont données par l'équation

$$\frac{r}{r'} = A\,e^{\frac{\theta}{\tang \alpha}},$$

A étant une constante arbitraire, r et r' les rayons menés d'un point de la courbe aux deux points fixes, θ l'angle de ces rayons.

3°. Les seuls systèmes circulaires isothermes, tant dans le plan que sur la sphère, sont les cercles concentriques ou de même pôle, et les cercles qui passent par deux points.

4°. Les seuls systèmes circulaires doubles, à la fois isothermes et orthogonaux, soit dans le plan, soit sur la sphère, sont les cercles passant par deux points et les cercles de même pôle.

5°. Il n'y a parmi les systèmes sphériques que celui des sphères concentriques qui soit isotherme.

6°. Un système de lignes isothermes en donne une infinité d'autres. En particulier, si dans les équations d'un système et de son orthogonal on remplace les coordonnées par les températures correspondantes, on obtient deux nouveaux systèmes isothermes et orthogonaux. Ces deux derniers en fournissent deux autres, et ainsi de suite.

7°. L'auteur démontre très-simplement un théorème de M. Binet sur les axes principaux des corps; un autre de M. Dupin sur les lignes de courbure des systèmes triples de surfaces orthogonales.

La théorie des surfaces isothermes rappelle naturellement le nom de M. Lamé, leur inventeur. Nous saisissons cette occasion de constater le succès obtenu par ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*. Nous sommes d'autant plus heureux de ce succès, qu'il encouragera sans doute l'illustre auteur à nous donner sous la même forme d'autres parties du cours qu'il professe avec tant d'éclat.

Dans la seconde thèse, l'auteur donne la théorie analytique des mouvements apparents due à Coriolis, et l'applique aux ingénieuses expériences de M. L. Foucault. Il rapporte les points du système à trois axes rectangulaires mobiles d'une manière quelconque, autour d'une origine qui elle-même se meut d'une manière arbitraire.

M. Garlin recherche si les images géométriques que M. Poinsot a données du mouvement absolu subsistent pour le mouvement apparent. Il trouve que ce dernier peut être représenté par le roulement, sans glissement, d'un certain cône attaché au corps sur un autre cône qui paraît fixe à l'observateur entraîné avec les axes mobiles. Il s'est assuré que le premier ne coïncide pas avec le cône du second degré découvert par M. Poinsot.

On voit, par ces simples extraits, combien il y a de choses dans les thèses de M. le Dr Garlin, et l'on regrettera comme nous que son travail n'ait pas reçu une publicité plus étendue.

PROUHET.

THÉORIE ANALYTIQUE DU PLAN ET DE LA LIGNE DROITE DANS L'ESPACE; par *M. Henry Faraguet*, ancien élève de l'École Polytechnique, ancien officier de marine. Imprimé à Dijon; 1854. In-8°, préface 1-2, 96 pages, 1 planche lithographiée.

Toutes les questions qui se rapportent au point, à la droite, au plan, considérés dans l'espace, soit isolément, soit combinés entre eux dans des positions générales ou dans des situations singulières, sont ici résolues, et les calculs sont exécutés. Le système de coordonnées est relatif à trois plans rectangulaires lorsqu'il s'agit d'angles et de longueurs à déterminer. C'est un dictionnaire de formules dont on a souvent besoin; la même question est résolue par plusieurs méthodes : utile exercice pour les élèves de nos lycées, et économie de temps pour les professeurs; deux avantages qui recommandent cet ouvrage. Aux *dix-neuf questions*, on peut ajouter celle-ci : Trouver l'équation du plan mené par la plus courte distance de deux droites et également incliné sur les deux droites.

Le mois de janvier de cette année (page 1) renferme un travail analogue de M. Baltzer pour les coordonnées obliques; il reste encore un autre à faire pour les coordonnées polaires : c'est le plus compliqué.

SOLUTION DE LA QUESTION 257

(voir t. XI, p. 368);

PAR M. L'ABBÉ PEPIN,
du petit Séminaire d'Iseure.

Réduire à des quadratures simples la valeur de l'intégrale triple

$$S = \int\int\int e^{-(x^2+y^2+z^2)}\, x^p\, y^q\, z^r\, dx\, dy\, dz,$$

où les limites des variables sont déterminées d'après l'inégalité

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqq 1. \qquad \text{(STREBOR.)}$$

1. Remplaçons $\frac{x^2}{a^2}$ par x, $\frac{y^2}{b^2}$ par y, $\frac{z^2}{c^2}$ par z, et, par con-

séquent, dx, dy, dz par

$$\frac{a}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx, \quad \frac{b}{2} y^{-\frac{1}{2}} dy, \quad \frac{c}{2} z^{-\frac{1}{2}} dz;$$

nous aurons

$$S = \frac{a^{p+1} b^{q+1} c^{r+1}}{r^3} \int\int\int e^{-(a^2 x + b^2 y + c^2 z)} x^{\frac{p-1}{2}} y^{\frac{q-1}{2}} z^{\frac{r-1}{2}} dx\, dy\, dz,$$

et les limites seront déterminées d'après l'inégalité

$$x + y + z \leqq 1.$$

Posons

$$\frac{p+1}{2} = l, \quad \frac{q+1}{2} = m, \quad \frac{r+1}{2} = n$$

et

$$U = \int\int\int e^{-(a^2 x + b^2 y + c^2 z)} x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx\, dy\, dz.$$

On aura

$$S = \frac{a^{2l} b^{2m} c^{2n}}{2^3} U.$$

2. Cette transformation faite, nous réduirons l'intégrale U par la méthode Dirichlet. Multiplions cette intégrale par l'intégrale définie

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u \cos ku\, du}{u},$$

dans laquelle

$$k = x + y + z.$$

Ce facteur est égal à l'unité pour toutes les valeurs de k comprises entre -1 et $+1$; et il est nul pour toute autre valeur (DUHAMEL, *Analyse*, t. II, p. 177). Et puisque les variables ne peuvent prendre que des valeurs positives, on aura tous les éléments de l'intégrale, et ces éléments seuls, en prenant 0 et ∞ pour limites de l'intégration relativement à chaque variable. Donc

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u\, du}{u} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \cos(x + y + z) u . e^{-(a^2 x + b^2 y + c^2 z)} x^{l-1} y^{m-1} z^{n-1} dx\, dy\, dz.$$

$\cos(x+y+z)u$ est la partie réelle du développement de l'exponentielle $e^{(x+y+z)u\sqrt{-1}}$. Soit donc

$$V = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(a^2-u\sqrt{-1})x-(b^2-u\sqrt{-1})y-(c^2-u\sqrt{-1})z} x^{l-1}.y^{m-1}.z^{n-1}\,dx\,dy\,dz;$$

l'intégrale U sera la partie réelle de l'intégrale

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin u\,du}{u}\,V.$$

3. L'intégrale V est le produit de trois intégrales simples. Celle qui se rapporte à x est

$$\int_0^\infty e^{-(a^2-u\sqrt{-1})x}\,x^{l-1}\,dx.$$

Or, en faisant

$$\alpha_1 = \text{arc tang}\,\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad r = (a^2+b^2)^{\frac{1}{2}},$$

on a (Moigno, *Calcul intégral*, p. 309)

$$\int_0^\infty x^{l-1}\,e^{-(a+b\sqrt{-1})x}\,dx = \frac{e^{l\alpha_1\sqrt{-1}}.\Gamma(l)}{r^l};$$

on a donc, en posant $\alpha = \text{arc tang}\,\frac{u}{a^2}$,

$$\int_0^\infty x^{l-1}\,e^{(a^2-u\sqrt{-1})x}\,dx = \frac{e^{-l\alpha\sqrt{-1}}.\Gamma(l)}{(a^4+u^2)^{\frac{1}{2}l}}.$$

On obtiendra de même les deux autres intégrales. Ainsi, en posant

$$\beta = \text{arc tang}\,\frac{u}{b^2},$$

$$\gamma = \text{arc tang}\,\frac{u}{c^2},$$

on aura

$$V = \frac{\Gamma(l)\,\Gamma(m)\,\Gamma(n).e^{-(l\alpha+m\beta+n\gamma)\sqrt{-1}}}{(a^4+u^2)^{\frac{1}{2}l}\,(b^4+u^2)^{\frac{1}{2}m}\,(c^4+u^2)^{\frac{1}{2}n}}.$$

Pour avoir la valeur de l'intégrale proposée, il faut réduire V à sa partie réelle. On aura donc

$$\mathrm{S} = \frac{a^{2l} b^{2m} c^{2n} \Gamma(l) \Gamma(m) \Gamma(n)}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\sin u \cos(l\alpha + m\beta + n\gamma)\, du}{u(a^4 + u^2)^{\frac{1}{2}l} (b^4 + u^2)^{\frac{1}{2}m} (c^4 + u^2)^{\frac{1}{2}n}}.$$

4. Si on appliquait la même méthode à l'intégrale triple

$$\mathrm{S}' = \iiint c^{+(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} x^p y^q z^r\, dx\, dy\, dz,$$

les limites étant déterminées comme pour l'intégrale S, on trouverait

$$\mathrm{S}' = \mathrm{S}.$$

La même méthode s'applique aussi avec succès à toute intégrale multiple de même forme que l'intégrale S ou que l'intégrale S′, quel que soit d'ailleurs le nombre des variables, pourvu que l'inégalité d'après laquelle on doit déterminer les limites soit de même forme que l'inégalité donnée.

FORMULES PRATIQUES DE QUADRATURE (*) ;

PAR M. PIOBERT.

La nécessité d'évaluer les aires des courbes se présentant fréquemment dans la pratique et dans les intégrations, cette question a été traitée analytiquement par plusieurs géomètres, qui ont plutôt cherché à obtenir une grande exactitude dans les résultats que la simplicité dans les opérations à effectuer; cependant la commodité des calculs est une qualité indispensable à toute formule, pour qu'elle puisse devenir usuelle.

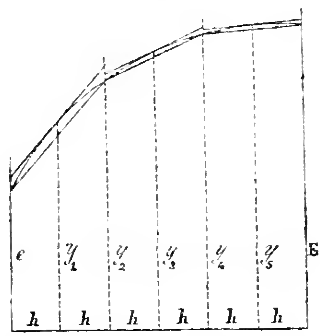
Les méthodes qui conduisent aux solutions les plus

(*) *Voir* tome X, page 410.

simples peuvent être facilement déduites de considérations géométriques.

1. Th. Simpson, qui a donné une formule très-élégante, très-simple et généralement très-approchée, ramène la question à trouver la surface comprise entre une courbe et un axe, et limitée par deux ordonnées extrêmes e et E (*fig.* 1); puis il divise cette surface en un nombre pair

Fig. 1.



de parties de même largeur h au moyen d'ordonnées équidistantes entre elles. On a alors deux figures faciles à évaluer, entre lesquelles la surface cherchée se trouve comprise, en traçant deux polygones, l'un intérieur ou inscrit, l'autre extérieur. Le polygone inscrit est formé par l'axe, les deux ordonnées extrêmes et les cordes qui réunissent deux à deux les sommets voisins de toutes les ordonnées de rang pair. Si l'on nomme I la surface, on a

$$I = h(e + 2\Sigma y_p + E),$$

Σy_p représentant la somme des longueurs des ordonnées de rang pair, e et E exceptés, comprises entre l'axe et la courbe. Le polygone extérieur est en quelque sorte circonscrit à la courbe, ou plutôt il est formé des tangentes à la courbe menées aux sommets des ordonnées impaires et terminées aux ordonnées paires comme les cordes du premier polygone, puis des petites portions de ces ordonnées paires comprises entre deux tangentes consécutives. Soit C la surface de ce polygone circonscrit, on a

$$C = 2h\Sigma y_i,$$

Σy_i représentant la somme des ordonnées de rang impair.

Chaque portion de courbe comprise entre sa corde et sa tangente, peut, tant que ces deux droites ne sont pas trop inclinées l'une sur l'autre, être considérée comme différant peu d'un arc de parabole dont l'axe serait parallèle aux coordonnées; mais tout arc de parabole comprend dans sa concavité les deux tiers de la surface du parallélogramme circonscrit, aire qui est alors sensiblement égale à celle du quadrilatère formé par la tangente, la corde et les portions d'ordonnées qui réunissent leurs extrémités. Si S est la surface cherchée,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} S &= I + \frac{2}{3}(C - I) = \frac{1}{3}(2C + I) \\ &= \frac{h}{3}(e + 4\Sigma y_i + 2\Sigma y_p + E), \end{aligned}\right.$$

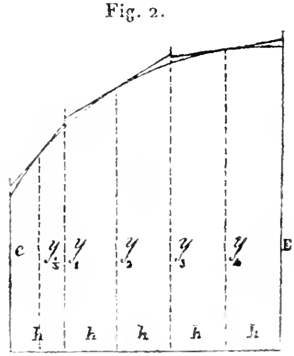
formule de Simpson.

Pour que la corde soit à peu près parallèle à la tangente au point de la courbe situé sur la même ordonnée que son milieu, il faut que la courbure de l'arc diminue sensiblement à mesure que la direction de la courbe se rapproche de celle des ordonnées; si cette diminution n'est pas aussi grande que dans la parabole à axe parallèle aux ordonnées, le quadrilatère circonscrit, ou l'espace qui sépare les deux polygones, a une surface moins grande que celle du parallélogramme également circonscrit au même segment, et la formule de Simpson donne une évaluation trop faible pour les courbes convexes, ou dont la concavité est tournée vers l'axe, et trop forte pour celles dont la courbure est en sens contraire. Cela a lieu également, mais dans des limites plus restreintes, lorsque la courbure des arcs diminue plus rapidement que dans la parabole à axe parallèle aux ordonnées, courbe pour laquelle la tangente est parallèle à la corde et la formule de Simpson exacte.

Cette formule, qui donne généralement une grande approximation, est beaucoup moins exacte pour les surfaces dont les contours ont une courbure très-prononcée, comme pour les sommets de courbe, lorsque les éléments des arcs sont peu inclinés par rapport aux ordonnées; il est alors indispensable de changer la direction de ces dernières : ainsi la parabole, pour laquelle la formule est toujours exacte lorsque les ordonnées sont parallèles à son axe, n'est évaluée, dans sa position ordinaire et à partir de son sommet, qu'avec une erreur en moins de $\frac{1}{23,314}$ de la surface véritable.

2. Lorsque, comme dans ce dernier cas, la courbure est très-grande à l'origine des coordonnées, que la direction des éléments de la courbe est peu inclinée sur celle des ordonnées et qu'il n'est pas possible de changer ces dernières, il ne faut pas employer le polygone inscrit qui s'éloigne beaucoup de la courbe dans cette partie; mais il convient alors de rapprocher le polygone extérieur de cette partie de la courbe, en divisant la surface en un nombre impair de parties (*fig.* 2), et en se servant de la

Fig. 2.



longueur $y_{\frac{1}{2}}$ de l'ordonnée située au milieu de la première division : on a ainsi

$$(2) \qquad S = h\left(y_{\frac{1}{2}} + 2\Sigma y_p\right),$$

formule qui donne, dans le cas très-défavorable de l'exemple précédent, moitié moins d'erreur que la formule de Simpson, c'est-à-dire qui ne diffère que de $\frac{1}{49,495}$ de la surface véritable de la parabole. Cette méthode réussit très-bien dans beaucoup d'intégrations.

3. Comme dans les circonstances où la formule de Simpson est le plus en défaut, le polygone inscrit s'éloigne beaucoup du polygone extérieur, on serait tenté de doubler le nombre de ses côtés, en joignant les sommets de toutes les ordonnées, ce qui diminue d'environ moitié la surface comprise entre les deux polygones, surface dont la répartition en dehors et en dedans de la courbe cause l'erreur d'évaluation; mais, par une suite de compensations, on retombe encore sur la formule de Simpson.

On réussit mieux en ne réduisant de longueur que la première et la dernière corde, qui, en général, divergent le plus de la tangente, et en limitant les autres aux sommets des ordonnées impaires, les seules employées alors à l'évaluation de la surface; de sorte que, pour un même nombre d'ordonnées connues, on réduit de près de moitié, ou dans le rapport de $2n+1$ à $n+2$, la longueur des arcs. La surface comprise entre les deux polygones étant également beaucoup diminuée dans les points où elle est la plus étendue, on n'a pas besoin d'évaluer très-exactement la répartition à faire entre les petits triangles mixtilignes intérieurs et extérieurs; aussi M. Poncelet a obtenu une formule assez approchée, en prenant simplement la moyenne des surfaces des deux polygones inscrit et circonscrit.

Dans ce cas, le polygone inscrit a pour surface

$$J = h\left(\frac{e - y_1}{2} + 2\,\Sigma y_i + \frac{E - y_{2n-1}}{2}\right),$$

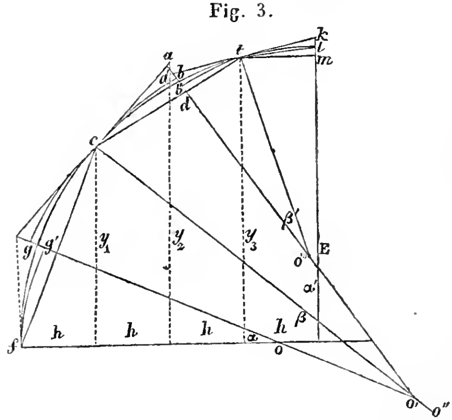
d'où

$$(3)\qquad S = \frac{J + C}{2} = h\left(\frac{e - y_1}{4} + 2\,\Sigma y_i + \frac{E - y_{2n-1}}{4}\right),$$

valeur un peu faible pour les courbes convexes à l'extérieur, et qui, dans le cas défavorable de la parabole ordinaire, diffère de la véritable surface de $\frac{1}{102,8}$.

4. Il est possible d'évaluer très-approximativement le rapport des surfaces comprises entre la courbe et les polygones extérieur et intérieur, en supposant, ce qui est permis pour de petits arcs, que chacune des portions *ct* de la courbe (*fig.* 3) est composée de deux arcs de cercle *cb* et

Fig. 3.



b't ayant, en *c* et en *t*, mêmes tangentes qu'elle, ou même polygone extérieur, et mesurant les angles α' et β' des cordes et des tangentes. En effet, si l'on mène à la corde *ct* une perpendiculaire *bo''*, telle que *aa'*, portion d'ordonnée comprise entre les deux tangentes consécutives, soit partagée de manière que les deux très-petits triangles formés par ces lignes soient égaux, on voit que la surface comprise entre le sinus de l'arc *cb* et la tangente est

$$\frac{r^2}{2}(\tang \alpha' - \sin \alpha' \cos \alpha');$$

la surface comprise entre le même arc *cb* et la portion de corde *cd* ou son sinus est

$$\frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha'}{180^\circ} - \sin \alpha' \cos \alpha'\right).$$

Le rapport de ces deux quantités

$$R = \frac{2 \tang \alpha' - \sin 2\alpha'}{\frac{\pi\alpha'}{90^\circ} - \sin 2\alpha'},$$

n'est fonction que de la grandeur angulaire ou de l'amplitude des portions de la courbe; on peut donc former une Table de ses différentes valeurs.

$\alpha =$	0	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
$R =$	1,50000	1,50009	1,50037	1,50082	1,50147	1,50229	1,50331	1,50451
$\alpha =$	8°	9°	10°	11°	12°	13°	14°	15°
$R =$	1,50590	1,50748	1,50926	1,51124	1,51342	1,51580	1,51839	1,52119
$\alpha =$	16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°
$R =$	1,52422	1,52747	1,53094	1,53464	1,53862	1,54283	1,54728	1,55200
$\alpha =$	24°	25°	26°	27°	28°	29°	30°	45°
$R =$	1,55699	1,56228	1,56787	1,57376	1,57996	1,58649	1,59337	1,75192

Lorsque la direction des extrémités de la courbe ne se rapproche pas de celle des ordonnées, il convient de modifier la valeur de e ou de E; ainsi, quand l'élément extrême est parallèle à l'axe, on fait $E = y_{2n-1}$ dans l'expression de la surface; ce qui revient à prendre pour der nier côté du polygone inscrit le sinus tm au lieu de la corde tl.

La Table des rapports R permet d'atteindre à une assez grande précision, lors même que les divisions de la surface comprennent des arcs très-prononcés. Si la courbe est divisée en arcs assez petits pour que leur amplitude ne dépasse pas 7 à 8 degrés par exemple, en prenant $R = 1,50$, la correction ne serait que de $\frac{1}{450}$ de la différence des surfaces inscrites et circonscrites, qui déjà diffèrent assez peu entre elles. On a alors

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} S &= J + \frac{3}{2}(C - J) = \frac{1}{3}J + \frac{2}{3}C \\ &= h\left(\frac{e - y_1}{6} + 2\,\Sigma y_i + \frac{E - y_{n-1}}{6}\right), \end{aligned}\right.$$

qui donne une valeur un peu plus grande que celle de la surface des courbes convexes; dans le cas très-défavorable de la parabole des exemples précédents, l'erreur est de $\frac{1}{608,8}$.

5. L'évaluation de la surface d'un quart de cercle au moyen des différentes formules (1), (2), (3) et (4), présente des résultats analogues à ceux qui ont été donnés précédemment pour la parabole dans sa position ordinaire. Ainsi, en prenant le rayon égal à l'unité et employant dix ordonnées, on a les approximations suivantes :

Avec la formule de Simpson (1)...........	$-$ 0,003646
Avec le polygone circonscrit (2)...........	$+$ 0,001825
Avec la formule de M. Poncelet (3).........	$-$ 0,001183
En supposant $R = 1,50$, formule (4)......	$+$ 0,000130
Avec la modification de E et une valeur moyenne de R................................	$+$ 0,000088

Cette dernière méthode est surtout avantageuse quand on n'a qu'un petit nombre de valeurs d'ordonnées de la courbe. Si, par exemple, on n'en avait que deux dans le cas précédent, les approximations seraient les suivantes :

Avec la formule de Simpson (1)............	$-$ 0,041381
Avec le polygone circonscrit (2)...........	$+$ 0,014696
Avec la formule de M. Poncelet (3)........	$-$ 0,014912
En supposant $R = 1,50$, formule (4)......	$+$ 0,003206
Avec la modificat ion de................	$+$ 0,001883
Avec cette modification et une moyenne valeur de R........................	$+$ 0,000462

Ces formules ne sont plus classées de la même manière quand les arcs de grande courbure sont placés moins défavorablement ; ainsi, pour l'hyperbole équilatère ayant pour équation $xy = 1$, et dans les limites de $x = 1$ à $x = 2$, en employant dix ordonnées, les approximations sont :

Avec la formule de Simpson (1).........	$+$ 0,000003039
Avec le polygone circonscrit (2).........	$-$ 0,000278846
Avec la formule de M. Poncelet (3)	$+$ 0,000123016
En supposant $R = 1,50$, formule (4)....	$-$ 0,000021978
Avec la modification de E et une valeur moyenne de R.....................	$-$ 0,000013634

La formule de Simpson reprend alors ses avantages.

SOLUTION DE LA QUESTION 289

(voir p. 192);

PAR M. N. DEVYLDER,
Professeur à l'Athénée royal de Namur.

1°. Soit d'abord

$$CAD = CBE.$$

Les deux triangles CAD et CBE sont semblables et fournissent la proportion

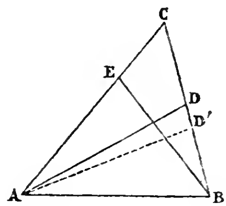
$$\frac{AD}{BE}=\frac{AC}{BC}.$$

Mais AC est $>$ BC, puisque l'on a

$$A < B.$$

Donc

$$AD > BE. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$



2°. Soit

$$CAD < CBE.$$

Faisons l'angle

$$CAD' = CBE.$$

La droite AD' fera, avec la droite CB, un angle AD'B plus grand que l'angle ADB, qui forme l'inclinaison de la droite AD sur CB; car on a évidemment

$$\hat{C} + CAD' > \hat{C} + CAD.$$

Par conséquent,

$$AD > AD'.$$

Mais, d'après ce qui précède,

$$AD' > BE;$$

donc, à fortiori,

$$AD > BE.$$

3°. Soient

$$AD = BE \quad \text{et} \quad \frac{DAB}{DAC}=\frac{EBA}{EBC},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\text{DAC}}{\text{CAB}} = \frac{\text{EB}}{\text{EBA}};$$

je dis que l'on aura

$$\text{CAB} = \text{CBA}.$$

Car supposons que l'on puisse avoir

$$\text{CAB} \gtrless \text{CBA},$$

on aurait dès lors

$$\text{DAC} \gtrless \text{EBC};$$

et, d'après ce qui vient d'être démontré, on devrait avoir

$$\text{AD} \lessgtr \text{BE}.$$

Mais, par hypothèse,

$$\text{AD} = \text{BE};$$

donc

$$\text{A} = \text{B}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cas particulier. Si les bissectrices de deux angles d'un triangle sont égales, le triangle est isocèle.

M. E. Lavelaine de Maubeuge (lycée de Montpellier), construit un triangle, connaissant la base, la hauteur et la bissectrice de l'angle opposé à la base, et démontre ensuite : 1° que deux triangles ABC, A'B'C' sont égaux lorsqu'on a

$$\text{A} = \text{A}', \quad \text{BC} = \text{B}'\text{C}';$$

$$\text{bissectrice AD} = \text{bissectrice A}'\text{D}';$$

2° dans un triangle rectiligne, au plus petit angle correspond la plus grande bissectrice, à l'angle moyen la moyenne bissectrice, et au plus grand angle la plus petite bissectrice.

Soit, dans le triangle ABC,

$$B > A;$$

alors

$$\text{bissectrice } AD > \text{bissectrice } BE.$$

En effet,

$$\overline{AD}^2 = AC.AB - DC.BD, \quad AC > BC,$$
$$\overline{BC}^2 = BC.AB - EC.EA;$$

or

$$AC.AB > BC.AB, \quad EA = \frac{AC.AB}{AB + BC}, \quad BD = \frac{BC.AB}{AB + AC};$$

donc

$$EA > BD.$$

On verra de même que

$$EC > DC;$$

donc

$$EC.EA > DC.BD;$$

par conséquent,

$$AD > BE.$$

Ensuite M. Lavelaine résout la question 289 à peu près comme ci-dessus.

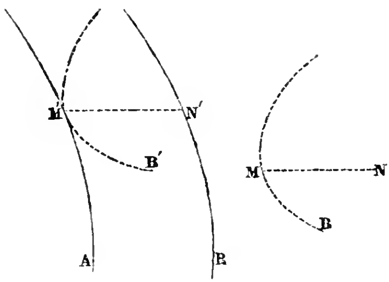
ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR LES REPTOIRES (suite et fin)

(voir p. 274);

Par M. PROUHET,
Professeur.

Problème VII. *Connaissant la reptoire et l'une de ses génératrices, trouver l'autre.*

Fig. 4.



Soient A la courbe fixe et R la reptoire (*fig.* 4). Supposons le problème résolu, et soit B la courbe rampante placée quelque part dans le plan, avec l'orientation qu'elle conserve dans tout le cours du mouvement. Appelons N le point décrivant.

Lorsque le point M vient en contact en un point M' de A, la droite NM coïncide avec N' M' qui lui est égale et parallèle. En outre, les tangentes aux deux courbes aux points M' et N' sont parallèles. De là la construction suivante :

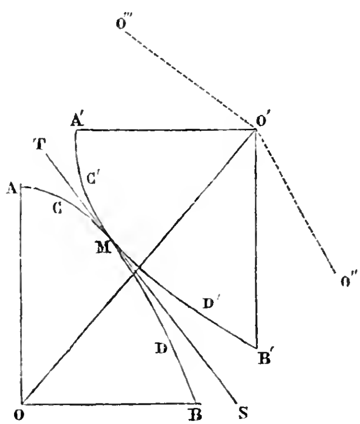
Ayant pris à volonté un point N' *sur la reptoire et un point* N *sur le plan, cherchez sur la courbe* A *un point* M' *tel, que la tangente à la courbe* A *en ce point soit parallèle à la tangente à la reptoire en* N'. *Menez* NM *égale et parallèle à* N' M' : M *sera un point de la courbe* B.

Remarques. I. Cette construction renversée permet de tracer la reptoire par points sans faire mouvoir la figure B.

II. Il y a réciprocité entre les courbes A, B et R. Si l'on obtient R en faisant ramper *extérieurement* B sur A, on aura A ou B en faisant ramper intérieurement B ou A sur R.

§ II. *Du mouvement de reptation sous-contraire.*

Fig. 5.



Définitions. I. Soient (*fig*. 5) AB un arc de courbe; M *son milieu d'amplitude*, c'est-à-dire le point qui le partage en deux arcs d'égale amplitude; TS la tangente à AB au point M; A′B′ un arc symétrique de AB par rapport à TS. Si l'on fait ramper A′B′ sur son égal AB, on dira que l'arc AB rampe *sous-contrairement* sur lui-même.

II. La reptoire engendrée sera dite elle-même une *reptoire sous-contraire*.

III. Le point M sera dit *centre de reptation*.

Remarques. I. Le mouvement de reptation amène tour à tour A′ en B et B′ en A.

II. Si l'on fait ramper une courbe fermée B sur son égale A, le mouvement de reptation pourra être considéré comme sous-contraire; car il est clair que les diverses courbes symétriques de A par rapport aux tangentes de celle-ci présentent toutes les orientations possibles, et, par suite, qu'il y en a une orientée comme la courbe B. Il n'en est pas toujours ainsi pour une courbe ouverte.

THÉORÈME VII. *Lorsque la courbe* AB (*fig.* 5) *rampe sous-contrairement sur elle-même, si l'on prend pour point décrivant le point de rencontre des normales extrêmes, la reptoire engendrée sera symétrique par rapport à la bissectrice* OO′ *de l'angle* AOB *des normales extrêmes.*

Soient MD et MC deux arcs d'égale amplitude pris sur la courbe AB; MD′, MC′ deux autres arcs symétriques des premiers par rapport à TS, et, par conséquent, aussi d'égale amplitude.

Le point C′ étant amené en D par le mouvement de reptation, O′ sera amené en O″ à l'extrémité d'une droite O′O″ égale et parallèle à C′D. De même, D′ étant amené en C, O′ passera à l'extrémité de la droite O′O″ égale et parallèle à D′C.

Mais $C'D = CD'$, et, de plus, ces deux droites sont également inclinées sur l'axe de symétrie TS.

Donc O′O″ et O′O‴ sont égales et également inclinées sur OO′. Donc O″ et O‴ sont symétriques par rapport à OO′, et, par suite, la reptoire a tous ses points symétriques deux à deux par rapport à l'axe OO′. C. Q. F. D.

Remarques. I. Les deux normales extrêmes de la reptoire sont égales entre elles, et égales à la somme des normales extrêmes OA et OB de la courbe primitive.

II. La normale OO′ de la reptoire est double de la perpendiculaire abaissée sur la tangente menée à AB par le milieu d'amplitude de cet arc.

III. Si l'on imagine une courbe, telle qu'une ellipse, ayant deux axes de symétrie et quatre sommets, si l'on prend pour centre de reptation le milieu d'amplitude de l'arc compris entre deux sommets consécutifs, on obtiendra une reptoire ayant quatre axes de symétrie et huit sommets. Cette reptoire, qu'on peut appeler du premier ordre, fournira une reptoire du second ordre ayant huit axes de symétrie et seize sommets, et ainsi de suite.

IV. Soit 2 A la longueur commune des grands axes de symétrie de la $n^{ième}$ reptoire, et 2 B la longueur des petits axes. Si 2 A est un *maximum absolu* et 2 B un *minimum absolu* parmi les diamètres de la reptoire, alors il est clair que celle-ci sera comprise entre deux circonférences de rayons A et B. Ces deux circonférences, divisées par 2^n, donneront deux limites comprenant la courbe primitive.

Pour que A soit un maximum absolu et B un minimum absolu, parmi les rayons vecteurs de la reptoire (le pôle étant au centre de la courbe primitive), il suffit que le rayon vecteur soit continuellement croissant ou décroissant d'un sommet de la reptoire au sommet voisin. Mais cette condition n'est pas indispensable.

Ces restrictions ne sont pas mentionnées par Bernoulli pages 437 et suivantes, page 445. A cette époque (1707), il n'applique ses théorèmes d'approximation qu'à des arcs de courbe avec lesquels il parvient à composer une courbe de forme elliptique, ce qui n'est possible que si l'amplitude est une partie aliquote de 2π. On verra plus loin qu'on peut se passer de ce procédé, et Bernoulli lui-même paraît y avoir renoncé.

Problème VIII. *Transformer un arc de courbe en d'autres arcs d'égale longueur, mais d'espèces différentes.*

En faisant ramper sous-contrairement l'arc proposé, on obtient une reptoire double en longueur, mais partagée en deux parties égales par un axe de symétrie. Une de ces parties résout le problème proposé. En opérant sur ce second arc comme sur le premier, on en obtiendra un troisième, et ainsi de suite.

On résout encore le problème en faisant ramper *intérieurement* l'arc donné sur un autre ou semblable et de longueur double.

Remarques. I. Si la courbe proposée est algébrique, il en sera de même de la reptoire, car l'équation de cette dernière s'obtiendra par une élimination entre des équations algébriques.

II. Lorsque la courbe proposée est un cercle, la reptoire est aussi un cercle, et l'une des conditions du problème n'est plus remplie; mais on peut procéder à cet égard de la manière suivante :

Soit $x^2+y^2=a^2$ l'équation d'un cercle; construisons une courbe donnée par les équations

$$\zeta=\frac{3a^2x-x^3}{3a^2},\quad \eta=\frac{y^3}{3a^2},\quad x^2+y^2=a^2.$$

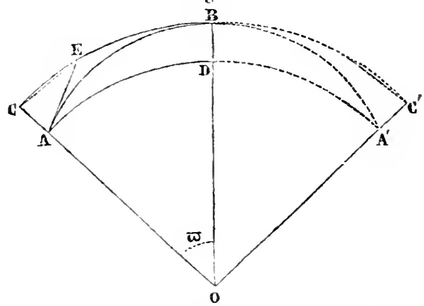
Le calcul montre que la différence entre la longueur d'un arc de la nouvelle courbe commençant à l'axe des y et celle d'un arc du cercle commençant au même axe et terminé au point (x, y) s'exprime par une quantité algébrique. Quand $y=0$, la partie algébrique disparaît, et l'arc de la nouvelle courbe est égal au huitième de la circonférence proposée, ou à une circonférence ayant pour rayon $\frac{a}{8}$, rayon qu'on peut considérer comme donné.

III. En faisant ramper l'un sur l'autre deux arcs semblables à un arc donné a, l'un égal à ma, l'autre à na, on obtiendra une reptoire égale à $(m+n)a$, ce qui permettra de transformer un arc en un autre, en général d'espèce différente, ayant un rapport donné avec l'arc proposé, et cela d'une infinité de manières.

Théorème IX. *Soient* AB [*fig.* 6 (*)] *un arc convexe;* OA, OB *ses normales extrêmes :* ϖ, *son amplitude. Si l'on suppose qu'un rayon vecteur, couché d'abord sur* OA *et se mouvant vers* OB, *en ayant son extrémité sur l'arc, soit toujours croissant, on aura*

$$\text{arc AB} < \varpi . \text{OB}. \tag{1}$$
$$\text{arc AB} > \varpi . \text{OA}. \tag{2}$$

Fig. 6.



Décrivons du point O, avec OA pour rayon, l'arc de cercle AD qui rencontre OB en D, et, avec OB comme rayon, l'arc BC qui rencontre OA prolongé en C. D'après l'hypothèse, l'arc AB devra être compris tout entier dans le quadrilatère mixtiligne ACBD.

Si l'on mène AE tangente à l'arc AB et, par suite, perpendiculaire à AO, on aura

$$\text{arc AB} < \text{AE} + \text{arc EB}.$$

Mais la perpendiculaire AE étant moindre que l'oblique EC et, à plus forte raison, que l'arc CE, on aura

$$\begin{aligned}\text{arc AB} &< \text{arc CE} + \text{arc EB},\\ &< \text{arc CB},\end{aligned}$$

ou bien

$$\text{arc AB} < \varpi . \text{OB}.$$

(*) Il s'est glissé dans cette figure quelques inexactitudes que le lecteur corrigera facilement en s'aidant des indications du texte.

Pour démontrer la seconde partie, replions la figure autour de OB : nous aurons, parce que l'arc ABA′ enveloppe l'arc ADA′,

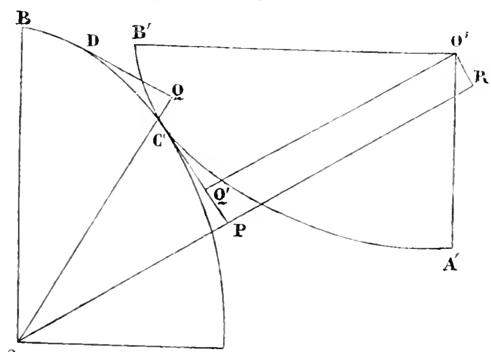
$$\begin{aligned} \text{arc ABA}' &> \text{arc ADA}',\\ 2\,\text{arc AB} &> 2\,\text{arc AD},\\ \text{arc AB} &> \varpi.\text{OA}. \end{aligned}$$

Remarques. I. Si du point O on abaisse des perpendiculaires sur les diverses tangentes à l'arc AB, le lieu des pieds de ces perpendiculaires sera un arc tangent à AB aux points A et B, et dont tous les autres points seront en dehors de AB.

II. Le rayon vecteur du nouvel arc sera, comme celui de l'arc primitif, croissant de OA vers OB.

Cette remarque, conséquence de la règle (*), pour mener les tangentes à ces sortes de courbes, nous dispensera plus tard de chercher l'équation de la reptoire.

Fig. 7.



Lemme. — AB (*fig.* 7) *est un arc de courbe d'une amplitude* ϖ, *et dont les normales extrêmes se rencontrent*

(*) Richard, *Nouvelles Annales*, tome II, page 436 *au point* O. AC *et* AD *sont des arcs d'amplitudes complémentaires* α *et* $\varpi - \alpha$. *Le point* O' *est le point de la reptoire sous-contraire qui correspond au point* C. *Enfin,* OP, OQ, OR *sont des perpendiculaires abaissées sur les tangentes à* AB *et à sa reptoire, menées par les points* C, D *et* O'. *Je dis qu'on a*

$$OR = OP + OQ.$$

En effet, dans le mouvement de reptation, la tangente DQ vient coïncider avec la tangente CP et OQ avec O' Q' perpendiculaire à CP. D'un autre côté, O' R tangente à la reptoire est parallèle à CP. On a donc, à cause du rectangle R O' Q' P,

$$OR = OP + PR = OP + O'Q' = OP + OQ. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarques. I. Si l'on pose

$$OP = P(\alpha), \quad OQ = P(\varpi - \alpha), \quad OR = P_1(\alpha),$$

le théorème que nous venons de démontrer s'exprimera par l'égalité

$$P_1(\alpha) = P(\alpha) + P(\varpi - \alpha).$$

II. Supposons que la première reptoire en engendre une seconde en rampant sous-contrairement sur elle-même, le centre de reptation étant le milieu d'amplitude de l'arc compris entre deux sommets consécutifs; que la seconde en engendre de la même manière une troisième, et ainsi de suite. Désignant par $P_n(\alpha)$ la perpendiculaire abaissée du centre sur une tangente à la $n^{ième}$ reptoire, nous aurons

$$P_2(\alpha) = P_1(\alpha) + P_1\left(\frac{\varpi}{2} - \alpha\right),$$

puisque $\frac{\varpi}{2}$ est l'amplitude d'un élément (*) de la pre-

(*) Nous entendons ici par élément d'une reptoire l'arc compris entre deux sommets consécutifs.

mière reptoire; mais

$$P_1(\alpha) = P(\alpha) + P(\varpi - \alpha),$$

$$P_1\left(\frac{\varpi}{2} - \alpha\right) = P\left(\frac{\varpi}{2} - \alpha\right) + P\left(\frac{\varpi}{2} + \alpha\right).$$

Donc

$$P_2(\alpha) = P(\alpha) + P\left(\frac{\varpi}{2} - \alpha\right) + P\left(\frac{\varpi}{2} + \alpha\right) + P(\varpi - \alpha).$$

On trouvera, pour la $n^{\text{ième}}$ reptoire, en posant $2^n = 2m$,

$$\begin{aligned} P_n(\alpha) = P(\alpha) &+ P\left(\frac{\varpi}{m} - \alpha\right) + P\left(\frac{\varpi}{m} + \alpha\right) \\ &+ P\left(\frac{2\varpi}{m} - \alpha\right) + P\left(\frac{2\varpi}{m} + \alpha\right) + \ldots \\ &+ P\left(\frac{m-1}{m}\varpi + \alpha\right) + P(\varpi - \alpha). \end{aligned}$$

III. Si l'on suppose alternativement $\alpha = 0$, $\alpha = \dfrac{\varpi}{2m}$, on aura

$$P_n(0) = 2\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}P(0) + P\left(\frac{2\varpi}{2m}\right) + P\left(\frac{4\varpi}{2m}\right) \\ + P\left(\frac{6\varpi}{2m}\right) + \ldots + P\left(\frac{2m-2}{2m}\varpi\right) + \frac{1}{2}P(\varpi) \end{array}\right],$$

$$P^n\left(\frac{\varpi}{2m}\right) = 2\left[P\left(\frac{1\varpi}{2m}\right) + P\left(\frac{3\varpi}{2m}\right) + \ldots + P\left(\frac{2m-1}{2m}\varpi\right)\right].$$

Théorème X. *Les mêmes hypothèses et notations étant conservées, comme aux théorèmes précédents, l'arc AB est compris entre deux arcs de cercle d'amplitude ϖ et ayant respectivement pour rayons*

$$\frac{P_n(0)}{2m}, \qquad \frac{P_n\left(\frac{\varpi}{2m}\right)}{2m},$$

pourvu que la longueur désignée par $P_n(\alpha)$ soit constamment croissante ou décroissante lorsque l'angle α varie de 0 à $\frac{\pi}{2m}$.

En effet, si $P_n(\alpha)$ est constamment croissant ou décroissant (*théor.* IX, *Rem.* II), il en résulte que le rayon vecteur de la $n^{ième}$ reptoire est lui-même constamment croissant ou décroissant pour tout un élément de cette reptoire : ses valeurs extrêmes sont donc $P_n(o)$ et $P_n\left(\frac{\varpi}{2m}\right)$, et, comme l'élément de la $n^{ième}$ reptoire a pour amplitude $\frac{\varpi}{2m}$, on en conclut que cet arc est compris entre

$$\frac{\varpi}{2m} P_n(o) \quad \text{et} \quad \frac{\varpi}{2m} P_n\left(\frac{\varpi}{2m}\right),$$

ce qui démontre le théorème, puisque l'élément de la $n^{ième}$ reptoire est égal à AB et que les limites précédentes peuvent s'écrire

$$\varpi \cdot \frac{P_n(o)}{2m} \quad \text{et} \quad \varpi \cdot \frac{P_n\left(\frac{\varpi}{2m}\right)}{2m}.$$

Remarques. I. $\dfrac{P_n\left(\frac{\varpi}{2m}\right)}{2m}$ est une moyenne arithmétique entre les longueurs des perpendiculaires abaissées du point O sur les côtés de rang pair d'un polygone équiangle de $2m+1$ côtés circonscrit à AB. $\dfrac{P_n(o)}{2m}$ représente aussi une moyenne, en ne comptant que pour un seul terme la demi-somme des normales extrêmes.

Du théorème sur les rayons de courbure des reptoires (4, II), il résulte que pour des reptoires d'un ordre de plus en plus élevé la courbure diminue de plus en plus, de sorte qu'un élément de la reptoire diffère de moins en moins d'une ligne droite ou d'un arc de cercle de très-grand rayon. On voit donc que si n augmente indéfiniment, la fonction $P_n(x)$ doit finir par remplir la condition énoncée, c'est-à-dire être toujours croissante ou décroissante quand on passe d'un sommet de la $n^{ième}$ reptoire au sommet voisin. Le théorème est donc vrai pour $n = \infty$, et, par suite,

Un arc de courbe AB, remplissant les conditions énoncées plus haut, *est égal à un arc de cercle de même amplitude et ayant pour rayon la limite de la moyenne des perpendiculaires abaissées du centre d'amplitude de l'arc* AB *sur les côtés d'un polygone équiangle circonscrit à cet arc.*

II. Dans tout ce qui précède on a supposé $m = 2^{n-1}$; mais, en écartant comme nous l'avons toujours fait, le cas des points singuliers, des courbes sinueuses, etc., les diverses fonctions que nous avons considérées doivent être ou finir par être toujours croissantes ou toujours décroissantes dans les limites où nous les faisons varier. De sorte que, si elles remplissent les conditions énoncées pour $m = 2^{n-1}$, quel que soit n, on conçoit qu'elles les rempliront encore lorsqu'on supposera m égal à un nombre entier quelconque.

III. Soit $AB = s$ un arc d'amplitude ϖ. Partageons-le en m parties d'égale amplitude $\frac{\varpi}{m}$, et désignons par p la perpendiculaire abaissée du centre d'amplitude sur la tangente menée en l'un des points de division. On aura, d'après ce qui précède,

$$s = \lim \varpi \cdot \frac{\Sigma p}{m} = \lim \Sigma p \cdot \frac{\varpi}{m},$$

et, par conséquent,

$$s = \int_0^{\varpi} p\, d\omega.$$

Cette formule a été donnée par Bernoulli (tome IV, page 89) sans démonstration ; mais il dit qu'elle est une conséquence de la théorie des reptoires, ce qui montre qu'il connaissait le théorème X, dont l'énoncé ne se trouve pas cependant dans ses OEuvres.

Lorsque les perpendiculaires ne sont pas abaissées du centre d'amplitude, il faut, pour avoir la longueur de l'arc s, joindre à l'intégrale précédente une partie algébrique, que le lecteur trouvera sans peine.

Cette formule se trouve aussi dans Legendre (*Fonctions elliptiques*, tome II, *appendice*). M. Faure l'a aussi démontrée dans les *Nouvelles Annales*, t. XI, p. 397, à propos d'une formule relative aux surfaces.

Applications. I. Lorsque la courbe AB est un quart d'ellipse, on trouve, en désignant ses axes par $2a$ et $2b$,

$$P(\alpha) = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha},$$

et la fonction $P_n(\alpha)$ se décompose en binômes, dont chacun est décroissant de $\alpha = 0$ à $\frac{\varpi}{m}$ si l'on a $a > b$. Le théorème X est donc applicable à l'ellipse, quel que soit n; mais on peut le présenter sous une autre forme.

Prenons sur une même droite (*) $CD = b$, $DE = a$, et décrivons sur CE comme diamètre une demi-circonférence. Soit l'arc $CM = 2\alpha$; on trouvera facilement que $DM = \sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha} = P(\alpha)$.

Cela posé, partageons la demi-circonférence en $2^n = 2m$ parties égales. Numérotons les points de division à partir de A, 0, 1, 2,..., $2m$, et désignons par p_0, p_1, etc., les

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

rayons vecteurs correspondants. Enfin soient

$$M_0 = \frac{\frac{1}{2}p_0 + p_2 + p_4 + \ldots + \frac{1}{2}p_{2m}}{m},$$

$$M_1 = \frac{p_1 + p_3 + \ldots + p_{2m-1}}{m};$$

le périmètre entier de l'ellipse sera compris entre deux circonférences ayant pour rayons M_0 et M_1.

II. De là ce corollaire : La moyenne des distances d'un point pris dans l'intérieur d'un cercle à tous les sommets d'un polygone régulier d'une infinité de côtés inscrits dans ce cercle, s'obtient en divisant par 2π le périmètre d'une ellipse qui aurait pour demi-axes la plus grande et la plus petite distance du point considéré à la circonférence.

Le cas de $b = 0$ fournit aussi un théorème intéressant que nous n'énonçons pas et qui permet d'approcher indéfiniment de π.

III. En appliquant le théorème X à des courbes rectifiables, on aura, suivant la remarque de Leibnitz, de nouveaux moyens d'approcher du rapport de la circonférence au diamètre.

Ces exemples suffisent pour montrer les avantages que peut offrir la théorie de Bernoulli, comme instrument de recherches ou de démonstration. Au reste, suivant une remarque qui nous a été communiquée par M. Terquem, cette théorie est susceptible d'une grande extension.

Si, sur une surface S, on trace une courbe C, et qu'on fasse mouvoir une surface S' parallèlement à elle-même, de manière qu'elle touche constamment S en un point de la courbe C, chaque point de S' décrira une courbe, gauche en général, et qui devra jouir de propriétés analogues à celles des reptoires. Si l'on imagine que la surface S soit engendrée par le mouvement d'une courbe C qui changerait de forme et de position suivant une loi donnée, et qu'on fasse tour à tour ramper S' suivant les diverses génératrices de S, l'ensemble des reptoires engendrées par un même point de S′ formera une surface qu'on pourrait nommer *reptoriale*, et dont il serait intéressant d'étudier les relations avec les deux surfaces qui lui donnent naissance. Peut-être reviendrons-nous sur ce sujet.

QUESTIONS SUR LA PERSPECTIVE-RELIEF.

Il n'y a qu'un point indivisible qui soit le véritable lieu de voir les tableaux; les autres sont trop près, trop loin, trop haut, trop bas. La perspective l'enseigne dans l'art de la peinture. Mais dans la vérité et la morale, qui l'assignera?

Pensées de PASCAL, 1^{re} partie, art. VI, *Foiblesse de l'homme.*

---

1. Soient A_1, A_2, A_3, etc., une série de points en ligne droite, et a_1, a_2, a_3, etc., une série de points aussi en ligne droite, et tels que les droites A_1a_1, A_2a_2, A_3a_3, etc., passent par le même point O. Qu'une série de plans parallèles entre eux soient menés par les points A_1, A_2, A_3, etc., a_1, a_2, a_3, etc. Désignons ces plans par les noms plan A_1, plan A_2, etc. Supposons des figures quelconques tracées dans les plans A; mettons la figure A_1 en perspective sur le plan a_1; la figure A_2 sur le plan a_2, et ainsi de suite. Nommons *modèle* le système des figures A, et *perspective-relief* ou *bas-relief* le système des figures perspectives *a*. Il s'agit de démontrer géométriquement et analytiquement :

1°. Trois points en ligne droite, dans le modèle, sont en ligne droite dans le bas-relief;

2°. Ces deux droites, modèle et bas-relief, se rencontrent:

3°. Tous les points de rencontre analogues sont sur un même plan, dit *plan d'homologie;*

4°. Quatre points sur un même plan quelconque dans le modèle sont sur un même plan dans le bas-relief;

5°. Les intersections de ces deux plans, modèle et bas-relief, sont sur le plan d'homologie;

6°. Les mêmes propriétés subsistent si les plans a toujours parallèles entre eux ne sont plus parallèles aux plans A;

7°. Si le modèle est une surface de degré n, le bas-relief est une surface de même degré.

Observation. Le célèbre graveur Abraham Bosse (*), dans son *Traité des pratiques géométrales et perspectives* (1665), donne des règles de bas-relief qu'il dit tenir de son ami Desargues. Les ennemis de ce grand géomètre demandèrent que Bosse fît disparaître ce nom des ouvrages qu'il publiait sous les auspices de l'Académie; il répondit : *qu'en homme d'honneur il ne devait et ne pouvait ôter ce nom.* On a vu parfois des géomètres éviter avec soin la nécessité de faire une telle réponse en ne nommant personne. C'est très-prudent et fort commode.

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez MALLET-BACHELIER, libraire, quai des Augustins, 55.

COURS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE, professé à la Faculté des Sciences de Paris par *M. J.-A. Serret,* examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique. Deuxième édition, revue et augmentée. In-8 de 600 pages et 1 planche. Paris, 1854. — Prix : 10 francs.

L'unité dans la variété est, selon Kant, le caractère du

(*) Né à Tours en 1611, y est mort en 1678.

beau. Adoptant cette définition, nous avons devant nous un très-bel ouvrage. La théorie générale des équations, c'est l'unité, la pensée dominante. Les congruences de Gauss, les substitutions combinatoires de Cauchy et Jacobi, quelques propriétés des nombres et même des propositions de géométrie incidemment liées à la théorie générale, forment cette diversité qui facilite le travail. *Alternis facilis labor,* dit le chantre de l'agriculture. Cette Algèbre supérieure est-elle complète? Non. On y cherche vainement la théorie des déterminants qui circule aujourd'hui dans toutes les parties de la science; vainement la théorie des homogènes, des *formes,* qui présentent l'analyse sous un aspect tout nouveau. Nous signalons d'autant plus volontiers ces fâcheuses lacunes, qu'elles peuvent être facilement remplies avec ce talent d'exposition, cette supériorité de vue et de spontanéité, types du génie analytique du célèbre auteur de l'*Algèbre supérieure*. C'est un complément qu'on a droit de réclamer et qu'on peut espérer d'obtenir. Voilà ce qui est encore à désirer. Montrons ce qu'on a obtenu : Faisant l'inventaire de l'ouvrage, on verra que tous les géomètres qui voudront lire, et pour ceux-ci seuls il est possible d'écrire, pourront connaître l'état actuel de la théorie équationnelle; les travaux de Gallois, d'Abel, de Cauchy sur cette partie de la science. Mais avant d'aller plus loin, il est juste de reconnaître qu'en trente leçons le savant professeur ne pouvait pas épuiser le sujet, et qu'on lui doit de la reconnaissance pour le grand nombre de faits analytiques qu'il a décrits et développés. La première leçon (1-11) roule sur les fonctions symétriques. Toute équation a une racine. Cette proposition a été longtemps admise sans démonstration. Euler et d'Alembert ont compris qu'il fallait une démonstration, et ont présenté des essais. M. Gauss a réussi; depuis, M. Cauchy a développé le procédé de M. Gauss, et MM. Liouville et Sturm ont éclairci ce développement. Ces travaux étant maintenant exposés dans des Traités élémentaires, M Serret n'en parle pas : c'est à regretter; car un esprit aussi lucide, aussi investigateur, ne touche à rien sans l'améliorer. L'existence d'une racine entraîne l'existence d'autant de racines qu'il y a d'unités dans le degré de l'équation. Chaque racine est évidemment fonction du degré et des coefficients de l'équation : fonction d'une nature transcendante, entièrement inconnue, et qui devient algébrique pour les quatre premiers degrés, et même pour tous les degrés, lorsqu'il existe certaines relations entre les coefficients, et Gallois a le premier établi que, lorsque ces fonctions sont exprimables en radicaux, on peut toujours les trouver. Quoi qu'il en soit, les coefficients de l'équation sont des fonctions symétriques de ces racines, combinées une à une, deux à deux, etc., selon une observation de Newton. En combinant ces coefficients entre eux par voie d'addition et de multiplication, on pourrait en déduire, mais d'une manière pénible, toute fonction symétrique en fonction des coefficients de l'équation. Newton a indiqué la méthode récurrente pour trouver directement la somme des puissances des racines ; et comme on peut toujours trouver le terme général d'une série récurrente, on a donc aussi la méthode *indépendante*. Mais Waring a découvert par induction la loi, et l'a ensuite démontrée en faisant voir que, si elle est vraie pour un degré donné, elle subsiste aussi pour le degré suivant; mais M. Serret, dans la Note (page 431), dérive cette loi d'une formule que Lagrange a donnée pour calculer la somme des puissances négatives des racines, formule qu'il déduit du coefficient de x^n dans le développement selon les puissances croissantes de x, de $\dfrac{1-f'x}{u-x+f(x)}$,

n est une constante. Remplaçant x par $\frac{1}{x}$ et appliquant la formule de Lagrange, on parvient d'une manière assez laborieuse à celle de Waring.

Toute cette Note appartient à M. Genocchi (*Nouvelles Annales*, tome XII, page 260). Pourquoi ne l'avoir pas cité? Le même analyste nous a envoyé une nouvelle démonstration fort simple, très-ingénieuse, d'un théorème de M. Cauchy, que nous donnerons par la suite (*ibid*, page 269), ainsi que ce beau théorème, que nous devons à M. le professeur Brioschi :

Soit l'équation

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n = 0,$$

on a

$$S_r = (-1)^r \begin{vmatrix} a_1, & 1, & 0, 0 \ldots 0 \\ 2a_2, & a_1, & 1, 0 \ldots 0 \\ 3a_3, & a_2, & a_1, 1, 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (r-1)a_{r-1}, & a_{r-2}, & a_{r-3} \ldots 1 \\ ra_r, & a_{r-1}, & a_{r-2} \ldots a_1 \end{vmatrix}$$

Lorsque $r > n$, on fait

$$a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = \ldots a_r = 0.$$

Les séries récurrentes étant représentées par une suite indéfinie d'équations périodiques du premier degré, les déterminants cramériens apparaissent naturellement. En combinant par additions et multiplications les sommes des puissances semblables, on obtient l'expression des fonctions symétriques *entières* en fonctions de ces sommes. La forme *indépendante* à été donnée par Waring (*Nouvelles Annales*, tome VIII, page 77). M. Serret démontre cette formule de la même manière que Waring, en faisant usage d'une notation différente (Note II, page 442). On trouve

$$\sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \ldots x_i^{\alpha_i}$$

$$= \sum (-1)^{i-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3\ldots\lambda_i} \Gamma(2)^{\lambda_2} \Gamma(3)^{\lambda_3} \ldots \Gamma i^{\lambda_i} \mathrm{T}(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i);$$

$x_1, x_3, \ldots, x_i$ sont i racines de l'équation.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i$ sont des nombres positifs entiers; les sommes S peuvent avoir un seul indice S_{α_1}, S_{α_2}, ou bien deux indices $S_{\alpha_1+\alpha_2}$, $S_{\alpha_1+\alpha_3}$, etc., ou trois indices et au plus i indices $S_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_i}$. Considérons un seul terme de la somme Σ cherchée. Représentons par λ_1 le nombre des S à un indice; par λ_2 le nombre des S à deux indices, et ainsi de suite; comme il n'y a en tout que i indices et que nous supposons ces indices tous différents les uns des autres, on a évidemment

$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \ldots + i\lambda_i = i,$$

$\mathrm{T}(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i)$ représente la fonction symétrique en S du terme qui renferme λ_1 fois des S à un indice; λ_2 fois des S à deux indices, etc. Par exemple, soit $i = 4$; $\mathrm{T}(1, 0, 1, 0)$ a pour type $S_{\alpha_1} S_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}$ et pour développement

$$S_{\alpha_1} S_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4} + S_{\alpha_2} S_{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4}$$
$$+ S_{\alpha_3} S_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4} + S_{\alpha_4} S_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}.$$

Les Γ désignent des produits continuels : ainsi

$$\Gamma(4) = 1.2.3.4;$$

et le signe Σ du second membre se rapporte à l'équation en i donnée ci-dessus. Il est évident que λ_i ne peut avoir d'autres valeurs que zéro et 1, et dans ce dernier cas tous les autres λ sont nuls. Cette notation rend plus facile la démonstration de Waring, savoir, que si la formule est vraie pour i, elle subsiste également pour $i+1$. N étant le nombre de termes qui composent $T(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_i)$, on a

$$N = \frac{\Gamma(i+1)}{\Gamma(2)^{\lambda_1}\,\Gamma(3)^{\lambda_2}\ldots\Gamma(i+1)^{\lambda_i}\,\Gamma(\lambda_1+1)\,\Gamma(\lambda_2+1)\ldots\Gamma(\lambda_{i+1})}.$$

Si, parmi les indices, μ_1 sont égaux à α_1, μ_2 à α_2, etc., il faudra diviser le second membre de l'équation ci-dessus par $\Gamma(\mu_1+1)\,\Gamma(\mu_2+2)$, etc.

Si l'on a

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \ldots = \alpha_i,$$

on obtient

$$\Sigma(x_1 x_2 \ldots x_i)^{\alpha}$$

$$= \sum \frac{(-1)^{i-\lambda_1-\lambda_2\ldots\lambda_i}}{1^{\lambda_1}.\,2^{\lambda_2}\ldots i^{\lambda_i}\,\Gamma(\lambda_1+1)\,\Gamma(\lambda_2+1)\ldots\Gamma(\lambda_i+1)}\, S_{\alpha}^{\lambda_1} S_{2\alpha}^{\lambda_2}\ldots S_{i\alpha}^{\lambda_i}.$$

Σ est toujours relatif à l'équation $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots + i\lambda_i = i$, et au moyen de cette dernière formule, on peut calculer un coefficient quelconque de l'équation donnée, en fonction des sommes des puissances semblables des racines; il suffit de faire $\alpha = 1$.

Nous ajouterons ici une observation qui est souvent utile. Soient

$$x - x_1 = y_1, \quad x - x_2 = y_2, \ldots, \quad x - x_4 = y_4, \ldots;$$

on peut trouver en fonction de x, une fonction symétrique quelconque des y; car, dans l'équation

$$(z-y_1)(z-y_2)\ldots(z-y_i)\ldots = 0,$$

tous les coefficients sont connus, au moyen des dérivées de l'équation donnée.

La seconde leçon (15-32) est une continuation. On indique la méthode de Waring pour calculer une fonction symétrique entière en fonction des coefficients de l'équation, mais pour des cas particuliers seulement, et on ne démontre pas la formule générale (voir *Nouvelles Annales*, t. VIII, p. 78).

Méthode de M. Cauchy pour calculer une fonction symétrique entière; très-belle sous le point de vue théorique, mais d'une pratique fatigante: celle de MM. Desmaret et Abel Transon semble préférable de beaucoup (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 75).

Le dernier terme de l'équation aux carrés des différences occupe une place importante dans certaines recherches analytiques et géométriques (*).

On indique le procédé de M. Cauchy pour déduire ce dernier terme relatif à l'équation de degré n du terme analogue et relatif à l'équation de degré $n-1$, et dans une Note (p. 472) on lit une méthode *nouvelle*, qui semble fondée sur la méthode indiquée par M. Joachimsthal (*Nouvelles Annales*, t. IX, p. 98) et même ne pas en différer essentiellement.

La troisième leçon (page 33-48) contient le moyen de calculer l'équation qui a pour racines une fonction rationnelle et *non symétrique* des racines d'une équation donnée, et la méthode de Lagrange pour calculer l'équation aux carrés des différences. On établit ce théorème donné et démontré par Wantzel :

Toute fonction rationnelle non entière de plusieurs racines d'une équation peut être remplacée par une fonction entière des mêmes racines (Nouvelles Annales, tome IV, page 61, note).

Application à l'élimination, degré de l'équation résul-

(*) Le *discriminant* des géomètres anglais.

tante, et dans les cas particuliers, la méthode Minding pour déterminer ce degré (Note VI, page 465). Cette méthode est fondée sur le parallélogramme de Newton, analytiquement arrangé par Lagrange (LACROIX, *Calcul différentiel*, tome I, page 108, 2e édition; 1810). Application à deux équations à deux inconnues (*). On choisit pour exemple deux équations incomplètes, l'une du sixième degré et l'autre du treizième, et le procédé Minding donne une équation finale du cinquante-huitième degré (page 475), et l'auteur ajoute : « La limite assignée par le théorème de Bezout est 6.13 ou 78 ». Cela est vrai pour le théorème *général*, mais Bezout indique aussi les cas particuliers où le degré s'abaisse. Il est à regretter que M. Serret ne se soit pas enquis de la méthode d'élimination de Bezout, dite du *polynôme-multiplicateur*, qui me semble la plus générale, la plus exacte, la plus conforme à l'état de la question; car l'équation finale n'est autre chose que la somme de toutes les équations données multipliées chacune par un polynôme tel, que dans l'addition toutes les inconnues, hormis une seule, disparaissent. La détermination des degrés et des coefficients de ces polynômes multiplicateurs ne dépend que de la résolution de systèmes d'équations du premier degré; les autres méthodes en usage sont même défectueuses en ce qu'elles ne donnent pas les valeurs infinies qui correspondent à des valeurs finies.

Exemple. Soient deux équations complètes du second degré à deux inconnues x et y; l'équation finale en x et celle en y ont respectivement pour premiers termes Mx^4, My^4, de sorte que, lorsque $M = 0$, x^4 et y^4 disparaissent simultanément, et les équations ne peuvent

---

(*) Voir le théorème de M. Finck (*Nouvelles Annales*, tome IV, pages 199 et 204).

désigner le cas où x^4 disparaissant, y^4 reste. Cela n'arrive pas dans la méthode de Bezout.

Avant de quitter ce sujet, je solliciterai l'explication d'une difficulté relative à l'élimination.

Soient n équations *complètes* à n *inconnues* : la première équation de degré m_1, la deuxième de degré $m_2, \ldots$, la $n^{ième}$ de degré m_n ; les coefficients sont présentés par des *lettres*. Supposons que l'on ait éliminé $n - 1$ inconnues. L'équation finale, étant la plus générale possible, doit s'appliquer à tous les cas particuliers et les comprendre tous. Or c'est un cas particulier lorsque l'équation de degré m_1 est le produit de m_1 facteurs linéaires ; l'équation m_2, le produit de m_2 facteurs linéaires, et ainsi des autres ; dans ce cas, il est de toute évidence que le système admet $m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_n$ solutions, car on a autant de systèmes d'équations du premier degré. Chaque inconnue est donc susceptible d'autant de valeurs et *pas davantage*, et l'équation finale générale devant donner toutes ces valeurs, doit donc monter *au moins* au degré $m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_n$. Si l'équation finale *générale* était d'un degré plus élevé

$$m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_n + q,$$

il faut que dans le cas particulier que nous avons considéré, on ait $q = 0$, c'est-à-dire les q premiers termes devraient disparaître ; ce qui annonce qu'outre les $m_1 m_2 m_3 \ldots m_n$ valeurs, il y a encore q valeurs infinies : les systèmes d'équations linéaires seraient donc satisfaits par plus de $m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_n$ valeurs, ce qui est impossible ; donc q est zéro dans le cas général, et l'équation générale finale est nécessairement de degré $m_1\, m_2\, m_3 \ldots m_n$. Voici maintenant ma difficulté. Ces considérations si simples se sont sans doute présentées à bien des géomètres qui ne les ont pas produites, parce que le raisonnement renferme quelque vice. Quel est ce vice ?

On a omis une propriété fondamentale des fonctions symétriques, démontrée par M. A. Transon (*Nouvelles Annales*, tome IX, page 83), propriété essentielle qui fait connaître le *degré* des lieux géométriques.

(*La suite prochainement.*)

GRAND CONCOURS DE 1854 (fin)

(voir page 298.)

CLASSE DE LOGIQUE.

SECTION DES LETTRES.

Première question. Démontrer que, si l'on fait tourner un parallélogramme successivement autour de deux côtés non parallèles, les volumes engendrés seront en raison inverse de ces côtés.

Seconde question. Calculer le côté d'un losange, sachant que ce côté est égal à la plus petite diagonale, et que la surface du losange équivaut à celle d'un cercle de 10 mètres de rayon.

CLASSE DE SECONDE.

SECTION DES SCIENCES.

Première question. Inscrire dans une sphère un cône dont la surface convexe soit équivalente à celle de la calotte sphérique, se terminant au même cercle.

Seconde question. Calculer les côtés d'un triangle, sachant que le périmètre est égal à $1^{m},20$, et que deux angles ont respectivement pour valeur $35^{\circ}\,17'\,15''$ et $62^{\circ}\,43'\,30''$.

CLASSE DE TROISIÈME.

SECTION DES SCIENCES.

Première question. Étant donné un triangle quelconque ABC, on diminue le côté AC d'une quantité arbitraire AA′, et l'on augmente le côté BC d'une quantité égale BB′. Démontrer que la nouvelle base A′B′ sera coupée par l'ancienne dans le rapport inverse des côtés primitifs AC et BC.

Seconde question. Calculer à moins d'un millimètre, et sans le secours des logarithmes, la circonférence qui a pour rayon la diagonale d'un carré de $0^{m},5$ de côté, et faire voir que l'on a obtenu l'approximation demandée.

Observation. Ces questions très-bien rédigées valent infiniment mieux que celles qui ont été données aux classes mathématiques proprement dites. On y reconnaît la touche d'un *professeur professant.*

FIN DE LA QUESTION RETIRÉE

voir p. 297).

1°. Construire la normale à la courbe au moyen du mode de génération de cette courbe;

2°. Démontrer que la droite qui joint le point décrivant au centre du cercle fixe décrit des aires proportionnelles aux angles que parcourt la droite qui va du centre du cercle mobile au point décrivant.

Observation. On garantit le sens et non le texte de cette fin, qui est la partie la plus curieuse de la question.

Le 1° est facile, mais le 2° paraît difficile si l'on n'emploie pas le calcul infinitésimal.

THÉORÈMES SUR LA DÉCOMPOSITION DES NOMBRES EN SOMMES DE CARRÉS.

1. Le nombre des solutions de l'équation

$$x^2 + 2y^2 = n$$

est égal au double de l'excès du nombre des diviseurs de n qui sont de l'une des deux formes

$$\dot{8} + 1, \quad \dot{8} + 3,$$

sur le nombre de diviseurs qui sont de la forme

$$\dot{8} + 5, \quad \dot{8} + 7.$$ (Lejeune-Dirichlet.)

2. n est un nombre impair positif; le nombre des solutions de l'équation

$$4n = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

est égal à la somme des facteurs de n, lorsque w, x, y, z sont des nombres impairs. (Jacobi.)

3. Soient m et p deux nombres premiers, et

$$p = m\pi + 1;$$

soit g une racine primitive relative au module p, et soit la congruence

$$g^e - a = \dot{p},$$

e étant l'*indice* de a, c'est-à-dire que, pour des exposants inférieurs à e, la congruence n'a pas lieu. Donnant à a successivement toutes les valeurs de la suite

$$1.2, \quad 2.3, \quad 3.4, \ldots, \quad (p-2)(p-1)$$

(doubles des nombres triangulaires), si

a_0 est le nombre des indices e de la forme		$\dot{m}$,
a_1	id.	$\dot{m}+1$,
a_2	id.	$\dot{m}+2$,
.		
a_i	id.	$\dot{m}+i$,
.		
a_{m-1}	id.	$\dot{m}+m-1$,

nous aurons

$$2p=(a_0-a_1)^2+(a_1-a_2)^2+(a_2-a_3)^2+\ldots+(a_{m-1}-a_0)^2.$$

(LEBESGUE.)

4. $$(2a-b)^2+3b^2=(2b-a)^2+3a^2=(a+b)^2+3(a-b)^2$$
$$=4(a^2-ab+b^2),$$

un des quatre nombres a, b, $a+b$, $a-b$ est divisible par 3.

Observation. On a dit qu'il fallait admettre dans

$$x^2+y^2=65^2,$$

comme une solution de décomposition,

$$65^2=65^2+0^2 \quad \text{(page 270)}.$$

On oppose à cette assertion qu'il faudrait admettre : 1° que le zéro est un entier; 2° que chaque carré est toujours décomposable en deux carrés; 3° que le tout est égal à sa partie. Donc il semble que, pour éviter ces trois absurdités, la décomposition 65^2+0^2 ne doit pas être admise. Nous répondons que, *analytiquement parlant,* zéro est le premier des *nombres entiers pairs;* que, dans le même sens, un carré est non-seulement décomposable en deux carrés, mais en mille carrés. Il y a une foule de questions, où zéro est admis *analytiquement* comme une solution (*). Je ne comprends pas la troisième objection.

(*) Par exemple, tout nombre est la somme de quatre carres. (FERMAT.)

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 263

(voir t. XII, p. 319);

PAR M. G. BELLAVITIS,
Professeur à l'Université de Padoue,

ET M. KORALEK.

Soit l'équation

$$3432\,x^7 - 12012\,x^6 + 16632\,x^5 - 11550\,x^4 + 4200\,x^3 - 756\,x^2 + 56\,x - 1 = 0.$$

Posons

$$x = y + \frac{1}{2};$$

on obtient

$$3432\,y^7 - 1386\,y^5 + \frac{345}{2}\,y^3 - \frac{35}{8}\,y = 0.$$

Cette équation est la septième dérivée de l'équation

$$\left(y^2 - \frac{1}{4}\right)^7 = 0,$$

qui a sept racines égales à $+\frac{1}{2}$, et sept autres égales à $-\frac{1}{2}$; donc, d'après le théorème de Rolle, l'équation donnée a sept racines réelles. C. Q. F. D.

Note du rédacteur. Soit $A_p x^p$ le terme d'une équation; la $n^{\text{ième}}$ dérivée de ce terme est

$$p.p-1\ldots p-n+1\,.\,A_p x^{p-n};$$

on peut donc écrire de suite la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une équation quelconque, et si l'équation donnée n'a que des racines réelles, il en sera de même de l'équation dérivée dont les racines seront comprises entre celles de l'équation donnée; il est donc facile de former des équations à racines réelles irrationnelles, et comprises entre des limites données (*voir* question 191, tome VII, page 368); mais M. Koralek a déterminé la valeur des racines irrationnelles, et voulant donner un exercice, l'habile calculateur n'avait pas à s'enquérir de l'origine de l'équation, ni de sa simplification. En divisant l'équation en y par y et faisant ensuite $y^2 = z$, on obtient

$$3432\,z^3 - 1386\,z^2 + \frac{315}{2}z - \frac{35}{8} = 0,$$

équation du troisième degré, susceptible d'une solution trigonométrique que nous devons à M. Koralek.

L'équation peut s'écrire

$$z^3 - \frac{231}{572}z^2 + \frac{105}{2288}z - \frac{35}{27456} = 0.$$

En posant

$$z = v + \frac{231}{3.572} = v + \frac{77}{572},$$

on obtient

$$v^3 - \frac{2772}{572^2}v + \frac{13552}{3.572^3} = 0.$$

Soient

$$\frac{3}{4}r^2 = \frac{2772}{572^2}$$

et

$$\frac{1}{4}r^3 \sin 3\varphi = \frac{13552}{3.572^3},$$

ou

$$r^2 = \frac{3696}{572^2}$$

et

$$r^3 \sin 3\varphi = \frac{54208}{3.572^3},$$

on aura

$$v_1 = r \sin \varphi, \quad v_2 = r \sin(60^\circ - \varphi)$$

et

$$v_3 = - r \sin(60^\circ + \varphi).$$

$$\begin{aligned}\log \sin 3\varphi &= \log 54208 - \log 3 - 3 \log 572 - 3 \log r \\ &= 4,7340634 - 0,4771213 - 8,2721880 \\ &+ 2,9205900 = 7,6546534 - 8,7493093 \\ &= 8,9053441 - 10;\end{aligned}$$

de là

$$3\varphi = 4^\circ\, 36'\, 45'',0;$$

donc

$$\varphi = 1^\circ\, 32'\, 15'',$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\log v_1 = \log r + \log \sin \varphi &= - 0,9735300 + 8,4286402 - 10 \\ &= 0,4551102 - 3,\end{aligned}$$

donc

1^re^ racine $\qquad v_1 = 0,002851742.$

$$\begin{aligned}\log v_2 &= \log r + \log \sin(60^\circ - \varphi) = \log r + \log \sin 58^\circ\, 27'\, 45'' \\ &= - 0,9735300 + 9,9305145 - 10 \\ &= \quad 0,9570645 - 2,\end{aligned}$$

donc

2^e^ racine $\qquad v_2 = 0,09058607.$

$$\begin{aligned}\log(- v_3) &= \quad \log r + \log \sin(60^\circ + \varphi) \\ &= \quad \log r + \log \sin 61^\circ\, 32'\, 15'' \\ &= - 0,9735300 + 9,9440527 - 10 \\ &= \quad 0,9705227 - 2,\end{aligned}$$

donc

3^e^ racine $\qquad v_3 = - 0,09343782.$

Pour avoir les valeurs de z, il suffit d'ajouter successivement aux valeurs de v_1, v_2 et v_3 la fraction $\frac{77}{572}$.

On a

$$\frac{77}{572} = 0,134615384\ldots,$$

donc

$$z_1 = v_1 + 0,134615384 = 0,137467126,$$
$$z_2 = v_2 + 0,134615384 = 0,225201454,$$
$$z_3 = v_3 + 0,134615384 = 0,041177564.$$

Pour avoir les valeurs de x, il suffit d'extraire les racines carrées de z_1, z_2 et z_3, et d'ajouter 0,5 aux six valeurs qu'on obtient ainsi. On a

$$\sqrt{z_1} = \pm 0,370\ 765\ 595,$$
$$\sqrt{z_2} = \pm 0,474\ 553\ 953,$$
$$\sqrt{z_3} = \pm 0,202\ 922\ 557,$$

donc

$$x_{1,2} = 0,5 \pm \sqrt{z_1}, \qquad x_{3,4} = 0,5 \pm \sqrt{z_2}, \qquad x_{5,6} = 0,5 \pm \sqrt{z_3},$$

ou

$$x_1 = 0,870\ 765\ 595,$$
$$x_2 = 0,129\ 234\ 405,$$
$$x_3 = 0,974\ 553\ 953,$$
$$x_4 = 0,025\ 446\ 047,$$
$$x_5 = 0,702\ 922\ 557,$$
$$x_6 = 0,297\ 077\ 443$$

En les écrivant dans l'ordre ascendant de grandeur, on a

$$x_1 = 0,025\ 446\ 047,$$
$$x_2 = 0,129\ 234\ 405,$$
$$x_3 = 0,297\ 077\ 443,$$
$$x_4 = 0,702\ 922\ 557,$$
$$x_5 = 0,870\ 765\ 595,$$
$$x_6 = 0,974\ 553\ 953.$$

Nous ne pouvons pas compter beaucoup sur l'exactitude des deux dernières décimales, car nous n'avons pris les logarithmes qu'avec sept décimales; néanmoins, nous sommes portés à les croire exactes, car l'application de la méthode de Graeff nous a donné d'une manière irrécusable les valeurs qui suivent :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0,025\ 446\ \ (0),\\
x_2 &= 0,129\ 234\ \ (4),\\
x_3 &= 0,297\ 077\ \ (4),\\
x_4 &= 0,702\ 922\ \ (6),\\
x_5 &= 0,870\ 765\ \ (6),\\
x_6 &= 0,974\ 554\ \ (0).
\end{aligned}$$

MÉLANGES.

1. *Sur certaine définition.* On attribue tantôt à Pascal, tantôt à Bossuet cette définition : Dieu est une sphère dont le centre est partout et la circonférence nulle part. Cette pittoresque définition, empruntée à la géométrie, appartient à maître Rabelais : « Cela faict, il (Bacbuc) » nous emplit trois oires (*) de l'eau fantastique, et ma- » nuellement nous les baillant, dist : Allés, amys, en » protection de ceste sphère intellectuelle de laquelle, » en tous lieux, est le centre et n'ha en lieu aulcune cir- » conférence que nous appelons Dieu (PANURGE, liv. V, » chap. 47). »

Rabelais, d'un savoir immense, supérieur à son siècle par un admirable bon sens, a été forcé, pour éviter le bûcher, de noyer ses pensées dans un océan d'excentricités les plus échevelées.

(*) Petites outres.

Voici comment s'exprime Pascal : « Tout ce que nous voyons au monde n'est qu'un trait imperceptible dans l'ample sein de la nature. Nulle idée n'approche de l'étendue de ses espaces. Nous avons beau enfler nos conceptions, nous n'enfantons que des atomes au prix de la réalité des choses. C'est une sphère infinie dont le centre est partout, la circonférence nulle part. Enfin c'est un des plus grands caractères sensibles de la toute-puissance de Dieu, que notre imagination se perde dans cette pensée (*Pensées*, 1re partie, art. IV, *Connaissances générales de l'homme*). »

2. *Problème Pothenot.* Trois points A, B, C étant déterminés sur une carte, connaissant les angles sous lesquels on voit les distances AB, BC d'un quatrième point, on construit celui-ci par l'intersection de deux arcs de cercles, d'après le théorème des *segments capables*. On attribue ordinairement la découverte de ce procédé topographique à Laurent Pothenot. En effet, la solution de ce problème est donnée par Pothenot dans le tome X des *Mémoires de l'Académie*, 1692. Mais la solution avait été donnée vingt années auparavant par John Collins, dans les *Transactions philosophiques* de 1671, d'après une question proposée par Townley. Un géomètre hollandais réclame même en faveur de Snellius. Je ne connais pas l'endroit : c'est peut-être dans son *Eratosthenes Batavus*, que je n'ai pas encore consulté. Ce procédé a été employé avec beaucoup de succès par Beautemps-Beaupré, pour ses célèbres cartes hydrographiques des côtes de France (*).

(*) Dans l'*Exposé des méthodes pour lever les cartes, etc.*, Beautemps-Beaupré dit (page 21) avoir tiré ce procédé de : *Essay on nautical surveying* de Dalrymple, 1771 ; seconde édition, 1786. Les *segments capables* sont indiqués page 6.

Laurent Pothenot a succédé en 1711 à Roberval, dans la chaire de Ramus, qui n'a pas été remplie depuis. Nommé de l'Académie en 1682, il en fut exclu vers 1699, à cause de ses absences trop fréquentes. Mort en 1732, il a été inhumé à Saint-Étienne-du-Mont.

3. *Problème de navigation.* Ayant observé les hauteurs de deux astres, dont on connaît les ascensions droites et les déclinaisons et aussi l'intervalle de temps écoulé entre les deux observations, déterminer la hauteur du pôle et l'heure.

Ce problème important et fort compliqué a attiré de bonne heure l'attention des géomètres.

Pierre Nonius s'en est occupé dans son ouvrage *De crepusculis* (*); Robert Hues, dans son ouvrage *De globis et eorum usu. Lugduni*, in-8, 1537. C'est Douves qui, le premier, a donné une forme pratique. Sa méthode se trouve dans le premier volume des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Harlem*, et Pembroke a démontré cette méthode dans les *Philosophical Transactions*, vol. LI, partie II, 1760, page 910.

Molweide, Littrow, Lobatto, Caillet (Pierre) (*), etc., y ont travaillé. La solution la plus générale est due à M. Gauss : *Methodum peculiarem elevationem poli determinandi explicat, simulque prælectiones suas proxima semestri habendas indicat* D. Carolus Fridericus Gauss, *astronomiæ P. P. O.* Gœttingue, 1808.

(*) Né à Alcazar (Portugal) en 1492; mort en 1517. Ses *Opera mathematica* ont été publiés à Basle en 1592.

(*) Le *Manuel du Navigateur*, par Pierre Caillet, professeur de l'École de navigation de Paimbœuf. Nantes, 1818, in-8° de 239 pages. Ouvrage rare et qui contient une solution très-pratique. Le savant examinateur des Écoles d'hydrographie est le fils de l'auteur. Les Anglais attribuent cette solution à M. Ivory, qui ne l'a donnée qu'en 1821 (*Phil. Magazine.*, August).

Le travail le plus récent est celui de M. Grunert (*Archiv. der Math.*, tome XIV, page 1; 1850).

4. *L'Observatoire impérial.* Pour occuper certains emplois dans l'Administration des tabacs, dans celle des télégraphes, il faut avoir passé par l'École Polytechnique, c'est-à-dire avoir subi publiquement plusieurs examens sérieux, sur des programmes connus d'avance et de tous. Pour entrer à l'Observatoire impérial, usine à calculs, il n'y a, à ce qu'on sache, ni examens, ni programmes, ni publicité. Un tel état de choses ne semble pas convenable. Il est juste pourtant de reconnaître que cette clandestinité n'a jusqu'ici entraîné aucun inconvénient. Les travaux des jeunes astronomes attachés à l'établissement montrent bien qu'on a fait d'excellents choix. Toutefois, nous conformant à l'esprit de nos institutions, ne devrait-on pas dorénavant réserver ces places, soit à des élèves de l'École Normale, soit à des élèves de l'École Polytechnique, ou bien ne les accorder qu'au concours? Nous soumettons cette idée au célèbre directeur, qui a tant à cœur d'environner l'Établissement de toutes les garanties de science et de studieuse application.

5. *Système duodécimal.* M. Vincente Pusals de la Bastida m'écrit de Madrid sur un *Systema natural de los numeros descubierto : Découverte d'un système naturel des nombres.* Ce système est celui qui a pour base 12. Outre les avantages d'une divisibilité par 2, 3, 4, 6, M. de la Bastida fait ressortir ceux-ci. Tout nombre écrit dans ce système qui commence à droite par un 2, est divisible par 2, mais non par 3, 4, 6; si le nombre commence par un 3, il est divisible par 3, mais non par 2, 4, 6; si le premier chiffre est 4, le nombre est divisible par 4, mais non par 3, 6, etc. D'après ces avantages, l'auteur propose de quitter l'arithmétique décennaire (*barbara*) pour l'arithmétique duodénaire (*perfecta*). En France, M. Gau-

thier est du même avis (*Comptes rendus*, t. VII, p. 238, 1838; t. XXVI, p. 255, 426, 1848; t. XXVIII, p. 91, 557; 1849).

Ces deux opinions feront difficilement renoncer les nations civilisées à l'introduction de la division décimale dans leurs systèmes métriques et monétaires. M. de la Bastida n'est pas bien informé lorsqu'il dit que *el systema metrico decimal ne puede sostenerse en Francia, sino haciendo una continua violencia a los pueblos* : « Le système métrique ne peut se maintenir en France, qu'en faisant continuellement violence aux usages du peuple » : cela a cessé d'être vrai. Le système métrique décimal est entré et entre de plus en plus dans nos habitudes; au lieu de demander des tiers et des demi-tiers, des quarts et des demi-quarts, les dames demandent tant de centimètres, et leurs robes n'en sont pas moins bien faites; de même pour les autres mesures. La faible divisibilité de dix est même favorable à l'esprit d'exactitude. C'est probablement ce qui a fait dire à Lagrange qu'il eût été avantageux d'adopter pour base un nombre premier.

6 De la Londe (*Nouvelles Annales*, t. XII, p. 205). Voici le titre de la 1[re] édition : *Éléments de Fortification*, 1[re] partie, qui contient l'*Arithmétique de l'ingénieur françois;* où l'on verra plusieurs nouvelles méthodes, etc. Paris, 1685, in-4.

7. M. Henri Fleury fait observer qu'avec quatre droites données de longueur, on ne peut construire que trois trapèzes, lorsque cela est possible.

8. *Le calendrier et la boussole.* Ces deux inventions ont nui à la popularité de l'astrognosie. Autrefois, avant l'existence du calendrier, les paysans étaient obligés de consulter, dans leurs travaux agricoles, les levers et couchers héliaques, cosmiques, acronyques de certaines constellations. Sans ces données astronomiques, plusieurs

passages de Virgile, d'Ovide, de Columelle, de Varron, etc., sont inintelligibles (*). Aujourd'hui les paysans se dirigent d'après le calendrier, et n'ayant plus besoin de constellations, ils ne les connaissent plus. De même pour les pronostics de la température, on observait Arcturus, les Hyades, les Pléiades, la brillante de la Couronne, etc.; aujourd'hui les étoiles sont remplacées par les saints du calendrier, saint Jean d'été, saint Jean d'hiver, saint Médard, sainte Luce, etc. Avant la boussole, les marins se dirigeaient d'après les étoiles; il y avait deux constellations principales directrices : chez les Grecs la grande Ourse, et chez les Phéniciens la petite Ourse. Les Pléiades tirent même leur nom de la navigation (πλεῖν, naviguer).

Aujourd'hui la boussole est la directrice, et les marins ne connaissent plus les étoiles. C'est une erreur de croire qu'elles servent encore à la navigation; on s'en sert, mais très-rarement, pour des opérations scientifiques et qu'on fait à terre; comme on ne peut avoir d'horizon à bord des bâtiments, les observations y deviennent impossibles.

9. *Idcirco certis dimensum partibus orbem*
Per duodena regit mundi Sol aureus astra.
(GEORG., lib. X, 231.)

« C'est pourquoi le blond soleil du monde trace à travers douze constellations l'orbe (annuel) divisé en *degrés* déterminés. »

Les Latins désignent les degrés par *partes*, à l'imitation des Grecs. Ordinairement, on entend ici par *partes* les saisons, mois et jours. *Dimensum* me semble plutôt se rapporter à une division en degrés, et l'épithète *certis*

(*) Pourquoi nos Traités de cosmographie destinés aux études classiques ne font-ils aucune mention de ces phénomènes? Une Table de ces levers et couchers se trouve dans l'*Astronomie* si instructive de Lalande, t. II, p. 334 (2e édition).

veut dire ce qui est bien fixé. Les quatre spondées consécutifs marquent peut-être la lenteur du mouvement annuel comparé au mouvement diurne.

10. Dans un Traité élémentaire de Mécanique auquel la position de l'auteur assure un grand débit, on lit qu'on a bien fait de supprimer la théorie des couples, parce qu'on ne les rencontre jamais dans la nature (textuel). Nous rappelant un dicton grec, nous nous abstiendrons de combattre une telle assertion. Voici ce dicton : Lorsque quelqu'un avançait une proposition d'une absurdité flagrante, granitique, et qu'un autre survenait pour réfuter sérieusement une telle proposition, les Grecs disaient du premier qu'il voulait traire un bouc, et du second qu'il tenait l'écuelle. Je ne veux pas tenir l'écuelle.

SOLUTION DE LA QUESTION 205 (Strebor)

(voir t. VIII, p. 107);

Par M. FAURE,

Officier d'Artillerie.

Soient PT une courbe sphérique, O un point fixe sur la sphère, et PQ un grand cercle tangent à la courbe en P. Menons un grand cercle par O faisant, avec OP, un angle POR, complément de OPQ; abaissons de M, milieu de OP, un arc MN perpendiculaire à OR, et prenons le point R de manière que OR soit divisée en parties égales au point N. Le grand cercle RS tangent à la courbe, lieu de R, fera, avec OR, un angle ORS = OPQ (*voir* la figure dans les planches du tome VIII).

Démonstration géométrique. Si, du point M comme pôle avec un rayon sphérique égal à OM, on décrit un cercle, il passe par les points P et R. Ce cercle contient aussi le point infiniment voisin du point R de la courbe dont il s'agit. Le grand cercle RS est donc à la fois tangent à cette courbe et au cercle M. Le rayon MR étant perpendiculaire à ce grand cercle, on a

$$\text{ORS} = 90^\circ - \text{ORM} = 90^\circ - \text{POR} = \text{OPQ}.$$

Démonstration analytique. Prenons le point O pour pôle, un grand cercle quelconque passant par O pour axe polaire. Désignons par φ l'angle dont la tangente trigonométrique est $\sin r \dfrac{d\omega}{dr}$, et par φ_1 celui qui a pour tangente $\dfrac{\sin r_1\, d\omega_1}{dr_1}$, on aura aussi

$$\text{tang}\, \varphi_1 = \frac{\text{tang}\frac{1}{2} r_1 d\omega_1}{d.\,\text{tang}\frac{1}{2} r_1};$$

le triangle OMN donne

$$\text{tang}\frac{1}{2} r_1 = \text{tang}\frac{1}{2} r \sin\varphi,$$

d'où

$$d.\,\text{tang}\frac{1}{2} r_1 = \frac{\sin r \cos\varphi\, d\varphi + \sin\varphi\, dr}{2\cos^2\frac{1}{2} r};$$

et

$$\text{tang}\,\varphi_1 = \frac{\sin r\, \text{tang}\,\varphi\, d\omega_1}{\sin r\, d\varphi + \text{tang}\,\varphi\, dr}.$$

Mais

$$\text{tang}\,\varphi\, dr = \sin r\, d\omega,$$

donc

$$\text{tang}\,\varphi_1 = \frac{\text{tang}\, d\omega}{d\varphi + d\omega};$$

mais

$$\omega_1 - \omega = \varphi - 90^\circ,$$

d'où résulte

$$d\varphi + d\omega = d\omega;$$

donc

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\varphi_1.$$

Remarque. En faisant dériver d'une courbe quelconque donnée une série de courbes se succédant d'après la loi indiquée, le théorème que l'on vient de citer fournit une formule pour la rectification d'une quelconque des courbes de la série. (STREBOR.)

Je désigne par r_n, ω_n les coordonnées polaires d'un point de la courbe qui occupe le $n^{ième}$ rang dans la série des courbes dérivées, et par s_n son arc. On a

$$ds_n = dr_n \sqrt{1 + \frac{\sin\omega_n^2\, d\omega_n^2}{dr_n^2}} = dr_n \sqrt{1 + \frac{\sin^2\omega\, d\omega^2}{dr^2}}.$$

On trouve facilement, en passant d'une courbe à l'autre,

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}r_n = \operatorname{tang}\frac{1}{2}r\sin^n\varphi;$$

par suite

$$dr_n = \frac{\sin^{n-1}\varphi\left(\sin\varphi + n\sin r\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dr}\right)dr}{\cos^2\frac{1}{2}r\,(1 + \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}r\sin^{2n}\varphi)}.$$

On peut déduire de là immédiatement

$$ds_n = \frac{\sin^{n-1}\varphi\left(\operatorname{tang}\varphi + n\sin r\,\frac{d\varphi}{dr}\right)dr}{\cos^2\frac{1}{2}r\,(1 + \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}r\sin^{2n}\varphi)},$$

puisque $ds\cos\varphi = dr_n$.

Si l'on veut avoir l'expression de l'arc au moyen de ω et r, on différentie l'équation

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin r\, d\omega}{dr},$$

ce qui donne

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{\sin r\,\frac{d^2\omega}{dr^2} + \frac{d\omega}{dr}\cos r}{1 + \sin^2 r\,\frac{d\omega}{dr^2}},$$

et l'on élimine φ dans la valeur précédente de $d\delta_n$. On trouve

$$ds_n = 2\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}r\,dr\left(\sin r\frac{d\omega}{dr}\right)^{n-1}\left[n\sin r\frac{d\omega^2}{dr^2} + \sin^2 r\frac{d\omega^3}{dr^3} + (n\cos r + 1)\frac{d\omega}{dr}\right],$$

et au lieu de prendre la courbe (ω, ρ) pour courbe primitive, on peut supposer qu'elle dérive elle-même d'une série d'autres courbes se succédant d'après la même loi. J'appelle $\omega_{-n}\, r_n$ les coordonnées du point de la courbe qui serait tel, qu'après n dérivations successives on obtienne le point ω, r de la première courbe. Soit aussi s_{-n} son arc, je vais faire voir que son expression peut se déduire de celle de s_n en changeant le signe de n, ce qui justifiera la convenance de la notation employée. Ainsi que l'a fait M. W. Roberts dans un travail analogue sur les courbes planes, on pourra donner à ces courbes le nom de *négatives*, tandis que celles qu'on a obtenues en premier lieu seront dites *positives*.

En désignant, comme précédemment, par φ l'angle dont la tangente serait

$$\frac{\sin r_{-n}\, d\omega_{-n}}{dr_{-n}},$$

on a

$$\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\,r_{-n} = \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}\,r\sin^{-n}\varphi\,;$$

on a, du reste,

$$ds_{-n} = \frac{dr_{-n}}{\cos\varphi},$$

et

$$dr_{-n} = \frac{\sin\varphi^{-(n+1)}\left(\sin\varphi - n\sin r\cos\varphi\,\dfrac{d\varphi}{dr}\right)dr}{\cos^2\frac{1}{2}r\,(1 + \mathrm{tang}^2\frac{1}{2}r\sin^{-n}\varphi)}$$

Par suite,

$$ds_{-n} = \frac{\sin^{-(n+1)}\varphi\left(\operatorname{tang}\varphi - n\sin r\,\dfrac{d\varphi}{dr}\right)dr}{\cos^2\frac{1}{2}r\,(1+\operatorname{tang}^2 r\sin^{-n}\varphi)}.$$

Or c'est bien là l'expression de ds_n, dans laquelle n aurait changé de signe; il en sera aussi de même relativement à la valeur de ds_n, obtenue en fonction de ω et r.

En regardant la sphéro-lemniscate de seconde espèce comme la première d'une série de courbes se succédant suivant la loi indiquée, l'équation de la $n^{ième}$ courbe entre les coordonnées polaires sphériques r_n, ω_n sera

$$\left(\operatorname{tang}\frac{1}{2}r\right)^{\frac{2}{2n+1}} = (\operatorname{tang}\alpha)^{\frac{2}{2n+1}}\cos\left(\frac{2}{m+1}\omega_n\right).$$

(*Voir* tome IX, page 309, **Strebor.**)

L'équation de la courbe primitive est

$$\operatorname{tang}^2\frac{1}{2}r = \operatorname{tang}^2\alpha\cos 2\omega.$$

En adoptant la rectification précédente

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin r\,d\omega}{dr} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}r\,d\omega}{d\operatorname{tang}\frac{1}{2}r},$$

la courbe donne

$$\frac{d\omega}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}r} = -\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}r}{\operatorname{tang}^2\alpha\sin 2\omega}.$$

Donc

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{1}{\operatorname{tang}2\omega};$$

par suite

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\omega.$$

On trouve facilement

$$\omega_n = n\varphi + \omega - n \cdot \frac{\pi}{2}:$$

donc

$$\omega_n = (2n+1)\omega:$$

mais

$$\tang \frac{1}{2} r_n = \tang \frac{1}{2} r \sin^n \varphi = \tang \frac{1}{2} r \cos^n 2\omega.$$

Élevant au carré et remplaçant $\tang^2 \frac{1}{2} r$ par sa valeur $\tang^2 \alpha \cos 2\omega$, on a

$$\tang^2 \frac{1}{2} r_n = \tang^2 \alpha \cos^{2n+1} 2\omega;$$

et comme

$$2\omega = \frac{3}{2n+1}\omega_n,$$

il en résulte

$$\tang^2 \frac{1}{2} r_n = \tang^2 \alpha \cos \frac{2}{2n+1}\omega_n,$$

ce qui revient à l'énoncé de M. Strebor.

TRIANGLES POLAIRES RÉCIPROQUES ET TRIANGLES POLAIRES RÉCIPROQUES SUPPLÉMENTAIRES.

1. Soient un triangle sphérique ABC; et

A′, A″	les pôles de l'arc	BC,
B′, B″	id.	AC,
C′, C″	id.	AB.

En combinant les six pôles trois à trois, et rejetant les combinaisons où entrent les mêmes lettres, on obtient les huit triangles

$$\begin{array}{ll} A'B'C', & A''B''C'', \\ A'B'C'', & A''B''C', \\ A'C'B'', & A''C''B', \\ B'C'A'', & B''C''A'. \end{array}$$

Chacun de ces huit triangles est polaire réciproque relativement au triangle donné ABC. Soit, par exemple, le triangle $A''B''C''$,

$$\begin{array}{lll} A'' & \text{est le pôle de} & BC, \\ B'' & \text{id.} & AC, \\ C'' & \text{id.} & AB; \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{lll} C & \text{est le pôle de} & A''B'', \\ B & \text{id.} & A''C'', \\ A & \text{id.} & B''C''. \end{array}$$

La distance de deux pôles est égale, soit à l'angle formé par les grands cercles correspondant à ces pôles, soit au supplément de cet angle. Les *côtés* et les *angles* d'un triangle ont donc des relations d'égalité ou des relations de *suppléments* avec les *angles* et les *côtés* du triangle donné; mais parmi ces triangles polaires, un seul n'a que des relations *supplémentaires*. Il est désigné sous le nom de *triangle supplémentaire*.

L'idée des triangles polaires est de Viète : « *Si sub apicibus singulis propositi tripleuri sphærici describantur maximi circuli : tripleurum ita descriptum, tripleuri primum propositi, lateribus et angulis est reciprocum.* » (*Opera mathematica*, page 418; Lugd. Bat., 1646.)

Les grands cercles étant décrits avec des rayons sphériques, il est évident que les sommets sont les pôles des grands cercles. La construction de Viète implique les huit triangles, mais l'énoncé ne semble se rapporter qu'au triangle supplémentaire. Viète se sert de deux autres modes de transformation. Le premier, qu'il nomme κατ' ἀναπλήρωσιν, par *supplément*. Prolongeant les côtés jusqu'à leurs seconds points d'intersection, on obtient ainsi trois nouveaux triangles. Le second mode, qu'il nomme *enallagen* πλευρογωνικην, changement de côtés en angles et angles en côtés. Il mêle ces deux modes, ce qui amène d'inutiles complications. Mais le premier qui ait décrit et employé explicitement le triangle polaire supplémentaire, c'est le célèbre géomètre hollandais Snellius : *Si ex angulis dati tripleuri tanquam polis, maximi circuli describantur, comprehendent tripleurum cujus latera et anguli, laterum et angulorum primi datorum residuis reciproce respondeant.* C'est la proposition VIII du livre III (page 120) de l'ouvrage suivant : *Willebrordi Snellii à Royen R. F. doctrinæ triangulorum canonicæ libri quatuor, quibus canonis sinuum, tangentium et secantium constructio, triangulorum tam planorum quam sphæricorum expedita dimensio breviter ac perspicue traditur; post mortem auctoris in lucem editi a Martino Hortensio Delfensi qui istis problematum gæodesicorum et sphæricorum tractatus singulos adjunxit quibus præcipuarum utriusque trigonometriæ propositionum usu declaratur. Lugduni Batavorum*, 1629; in-8 de 224 pages.

Snellius ne prétend pas être l'inventeur du théorème, car il en dit : *Theorema hoc perutile est et sequentibus demonstrationibus libri 4 peroportunum, atque a plerisque varie sollicitatum, ac legibus non necessariis alligatum: quod nos iis vinculis liberatum generaliter hic proponimus.*

Il a seulement délivré ce théorème *a vinculis*; cela signifie probablement qu'il a débarrassé le problème des inutiles complications de Viète et d'autres. Dans le livre quatrième, où il se sert du triangle supplémentaire pour calculer les côtés, les angles étant connus, il adopte la dénomination de Viète, *ennalagen* πλευρογωνικήν (lib. IV, p. 2.2. p. 186). L'ouvrage de Snellius a été édité par Martinus Hortensius, jeune géomètre ami de l'auteur; après la dédicace aux États généraux de Hollande, vient la préface où Hortensius dit que l'impression était commencée, lorsque l'auteur fut attaqué de la maladie dont il est mort (13 octobre 1626), à l'âge de trente-cinq ans, et, selon l'usage du temps, on lit deux épîtres louangeuses en vers adressées à Hortensius par Hugo Borel et Joh. Corneli Waardanus. L'ouvrage est accompagné de Tables de sinus, formant un ouvrage à part, avec une autre pagination et un autre titre, portant la date de 1626, et a été imprimé du vivant de l'auteur. Mais Hortensius avertit qu'il ne faut pas trop se fier à ces Tables, l'auteur étant déjà malade lors de la révision.

Les initiales R. F. qui accompagnent le nom de Snellius, signifient Rudolphi Filii. Le père était aussi professeur de mathématiques à l'Université de Leyde, et le fils lui a succédé en 1613; Rudolphe Snellius est auteur de l'ouvrage suivant : *Rudolphi Snellii in P. Rami geometriam prælectiones, cum lectissimis Lazari Schœneri et Johannis Thomæ Freigii explicationibus, ad præcipua quæque elementa statim adjectis illustratæ. Francof. ex off. typogr. Johannis Saurii impensis hæredum Petri Fischeri.* MDXCVI; in-8 de 361 pages.

Le fils est surtout célèbre par son *Eratosthenes Batavus; de terræ ambitus vera quantitate suscitatus.* Leyde, 1617; in-4. L'auteur, à ving-six ans, a donné le premier une méthode *pour mesurer* un degré terrestre qui est encore en usage, et a aussi le premier mesuré avec quelque exactitude un degré terrestre. Ses papiers restèrent entre les mains de Hortensius, et, depuis, les héritiers de ce professeur les montraient sans difficulté. Huyghens dit y avoir lu un volume complet (*volumen integrum*) d'optique où Snellius donne la véritable loi de la réfraction, volume qui n'a jamais été publié, et Huyghens ajoute que Descartes a eu aussi ces papiers en communication. Cette assertion d'un personnage aussi considérable jette quelque ombrage sur la découverte du philosophe. Toutefois, son nom doit y rester attaché; car, dans les sciences, la publicité seule constitue un droit à la priorité, à moins qu'un plagiat ne soit authentiquement constaté, et Descartes, gentilhomme et ancien officier français, était essentiellement homme d'honneur.

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez MALLET-BACHELIER, libraire, quai des Augustins, 55.

COURS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE; par *M. Serret* (suite) (voir t. XIII, p. 357).

Leçon quatrième (49 - 67). — La méthode d'élimination par les fonctions symétriques ne donne pas la correspondance entre les valeurs des inconnues. M. Liouville, à l'aide d'un procédé indiqué par Poisson, remédie à cet inconvénient; c'est par là que commence cette leçon. (Voir *Nouvelles Annales*, tome VI, page 295). Cela revient aussi à chercher la racine commune à deux équations; question dont se sont occupés Lagrange (*Acad. Berlin*, 1770 et 1771) et Abel (*Annales de Gergonne*, tome XVII) (*). Ces deux théorèmes qui termi-

(*) On a oublié d'inserer ce Memoire dans les OEuvres complètes d'Abel publiées par M. B. Holmboe. Christiania; 2 vol. in-4; 1839.

nent la leçon n'étant pas dans nos *Annales*, nous croyons devoir les consigner ici.

Théorème de Lagrange.

Soient

$$(1) \qquad f(x) = x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$
$$(2) \qquad F(x) = x^n + q_1 x^{n-1} + q_2 x^{n-2} + \ldots + q_n = 0,$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_n);$$

les a sont les n racines de l'équation (2).

Formons l'équation

$$(3) \qquad (z - f(a_1))(z - f(a_2)) \ldots (z - f(a_n)) = 0.$$

Autant cette équation aura de racines nulles, autant les équations (1) et (2) auront de racines communes; les coefficients de l'équation (3) sont donnés par la théorie des fonctions symétriques et sont des fonctions entières de

$$p_1, p_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots, q_n.$$

Mais on peut déduire ces coefficients par différentiation du dernier terme de l'équation (3). En effet, soit

$$V = f(a_1) f(a_2) \ldots f(a_n)$$

(V est une fonction entière de $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$);

$$f(a_1) = a_1^m + p_1 a_1^{m-1} + \ldots + p_m,$$
$$\frac{df(a_1)}{dp_m} = 1;$$

de même

$$\frac{df(a_2)}{dp_m} = 1 \ldots.$$

Donc $\dfrac{dV}{dp_m}$ est la somme des produits $n-1$ à $n-2$ des racines $f(a_1) . f(a_2)$, etc. On a ainsi le coefficient de z. Par un raisonnement analogue, on trouve le coefficient de z^2, etc.; on a donc

$$z^n - \frac{1}{n-1}\frac{d^{n-1}V}{dp_m^{n-1}} z^{n-1} + \ldots \pm \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dp_m^2} z^2 \mp \frac{dV}{dp_m} z \pm V = 0.$$

Ainsi, pour que μ racines de l'équation (2) satisfassent à l'équation (1), on doit avoir les μ conditions

$$V = 0, \quad \frac{dV}{dp_m} = 0, \quad \frac{d^2V}{dp_m^2} = 0, \ldots, \quad \frac{d^{\mu-1}V}{dp_m^{\mu-1}} = 0.$$

S'il n'y a pas de racines égales parmi les n racines a, les deux équations (1) et (2) ont nécessairement un facteur commun de degré μ; mais s'il y a des racines égales, cette conséquence n'est plus certaine; de même les équations

$$\frac{df(a_1)}{dp_m} = 1, \ldots,$$

ne subsistent qu'autant qu'aucun coefficient p_1, p_2, etc., ne soit fonction de p_m; mais si cette dépendance existe, les équations de condition ne sont plus les mêmes.

Si b_1, b_2, ..., b_m sont m racines de l'équation (1), on aura des conditions analogues à celles qu'on vient de donner, pour que ces μ racines de l'équation (1) appartiennent à l'équation (2).

Exemple. Quelles sont les conditions pour qu'une ligne plane du troisième degré se décompose en une conique et une droite?

Solution. Soient

(1) $$f(x) = x^3 + p_1 x^2 - p_2 x + p = 0,$$

(2) $$F(x) = x^2 + q_1 x + q_2 = 0;$$

p_1, p_2, p_3, q_1, q_2 sont des fonctions de y d'un degré indiqué par l'indice :

$$
\begin{aligned}
V = q_2^3 - q_1 q_2^2 p_1 + (q_1^2 q_2 - 2 q_2^2) p_2 - (q_1^3 - 3 q_1 q_2) p_3 + q_2^2 p_1^2 \\
- q_1 q_2 p_1 p_2 + (q_1^2 - 2 q_2^1) p_1 p_3 + q_2 p_2^2 \\
- q_1 p_2 p_3 + p_3^2 = 0,
\end{aligned}
$$

$$\frac{dV}{dp_3} = - q_1^3 + 3 q_1 q_2 + (q_1^2 - 2 q_2) p_1 - q_1 p_2 + 2 p_3 = 0.$$

Éliminant p_3,

$$(q_1^2 - 4 q_2)(q_1^2 - q_2 - q_1 p_1 + p_2)^2 = 0,$$

posons

$$q_1^2 - 4 q_2 = 0,$$

la conique se réduit à une droite double; et éliminant q_2 de $\frac{dV}{dp_3}$, on obtient

$$q_1^3 - 2 q_1^2 p_1 + 4 q_1 p_2 - 8 p_3 = 0.$$

Cette équation donne les valeurs de y, correspondant aux intersections de la droite double avec la courbe du troisième degré. Si la dernière équation est une identité, la courbe du troisième degré se réduit à une droite et à une conique. Si $q_1^2 - 4 q_2$ n'est pas nul, on aura

$$q_1^2 - q_2 - q_1 p_1 + p_2 = 0;$$

éliminant q_2 entre cette équation et $\frac{dV}{dp_2} = 0$, on obtient

$$q_1^3 - 2 q_1^2 p_1 + q_1 (p_2 + p_1^2) + p_3 = 0.$$

Si cette équation est une identité, la courbe du troisième degré représente le système de trois droites.

(La suite prochainement.)

PROPRIÉTÉS DU TÉTRAÈDRE DANS LEQUEL LES TROIS HAUTEURS (*) SE RENCONTRENT.

COMMUNIQUÉ PAR UN PROFESSEUR.

1°. Les plus courtes distances entre les arêtes opposées se coupent au point de rencontre des trois hauteurs.

2°. La somme des distances d'un point aux six arêtes du tétraèdre est un minimum au point de rencontre des trois hauteurs.

3°. Les pieds des plus courtes distances entre les arêtes et les milieux de ces arêtes sont douze points situés sur une sphère dont le centre est le centre de gravité du tétraèdre.

Le cercle des neuf points sert à démontrer l'existence de la sphère à douze points.

M. G.-F.-W. Baehr, professeur de philosophie au Gymnase de Middelbourg, signale cette belle propriété dynamique. Lorsque, dans un tétraèdre, deux arêtes sont à angle droit, rendant fixe une de ces arêtes, on peut communiquer au solide une rotation telle, que l'axe n'éprouve aucune pression; ce qui est impossible lorsque l'angle de croisement n'est pas droit. (*Verhandling over eene merkwaardige Dynamische eigenschap van eene bjzondere soort van Driehoekige Piramiden* : Dissertation sur une propriété remarquable d'une certaine espèce de pyramides triangulaires; 1851; in-8.) Nous y reviendrons.

(*) Le tétraèdre du grand Concours (page 296).

SUR LE MOT KARDAGA ET SUR UNE MÉTHODE INDIENNE POUR CALCULER LES SINUS.

Par M. WOEPCKE.

Dans le tome XII, page 44, des *Nouvelles Annales*, on signale le mot *kardaga* à l'attention des personnes qui s'occupent de recherches historiques.

La question de l'origine et de la vraie signification de ce terme me paraît être résolue dans le passage suivant du Mémoire de M. Reinaud sur l'Inde (XVIII[e] vol. des *Mémoires de l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres*, page 313) :

» A l'égard du mot *kardagia*, Albyrouny rapporte » qu'il s'appliquait à un *arc de cercle* renfermant la » 96[e] partie de la circonférence, et ayant la valeur de » $3^\circ 45'$, ou, en d'autres termes, de 225 minutes. Ce » mot est peut-être une altération du sanscrit *cramadjya*, » qui signifie *sinus droit*. »

Je reviendrai à la fin de cette Note sur la manière dont cette dernière signification, qui est la vraie, a pu être modifiée dans l'usage, et sur les altérations que, pareillement, le mot *cramadjya* même a eues à subir. Je commencerai par discuter un passage important du *Sourya Siddhanta* (*), qui confirme complétement la conjecture du célèbre académicien, et dont voici la traduction textuelle :

« Divisez le nombre de minutes contenu dans un sinus,

(*) *Asiatick Researches*, 5[e] édition, London, 1807, in-8°; vol. II, page 245. Ce passage y est donné par *M. Davis* dans un Mémoire sur le calcul astronomique des Indiens

» savoir 1800, par 8, le quotient 225 est le premier *jya-*
» *pinda*, ou la première des vingt-quatre portions de la
» moitié de la corde de l'arc. Divisez le premier *jyapinda*
» par 225, retranchez le quotient 1 du dividende, et
» ajoutez le reste 224 au premier *jyapinda* afin d'obtenir
» le second *jyapinda* 449. Divisez le second *jyapinda*
» par 225, et, attendu que le quotient est 1 et la fraction
» de plus d'une demi-minute, retranchez 2 du reste pré-
» cédent 224, et ajoutez le reste ainsi trouvé au second
» *jyapinda* afin d'obtenir le troisième *jyapinda* 671.
» Divisez ce nombre par 225, et retranchez le quotient
» 3 du dernier reste 222; ajoutez le reste ainsi trouvé
» 219 au troisième *jyapinda* afin d'obtenir le quatrième
» *jyapinda* 890. Divisez ce nombre par 225, et retran-
» chez le quotient du dernier reste; ajoutez le reste ainsi
» trouvé au quatrième *jyapinda* pour obtenir le cin-
» quième *jyapinda* 1105, et continuez de la sorte jusqu'à
» ce que les vingt-quatre CRAMADJYAS (sinus droits) soient
» au complet, ce qui sera, comme il suit :

1	2	3	4	5	6	7	8
225,	449,	671,	890,	1105,	1315,	1520,	1719,
9	10	11	12	13	14	15	16
1910,	2093,	2267,	2431,	2585,	2728,	2859,	2978,
17	18	19	20	21	22	23	24
3084,	3177,	3256,	3321,	3372,	3409,	3431,	3438.

Exprimant cela en formules, et désignant par une fraction, avec deux traits superposés, le nombre entier le plus voisin de cette fraction, la méthode indienne pour calculer les sinus est la suivante :

$$\sin 225' = 225;$$

$$\sin(2.225') = \left\{225 - \frac{\sin(1.225')}{225}\right\} + \sin(1.225')$$
$$= 224 + \sin(1.225') = 449;$$

$$\sin(3.225') = \left\{224 - \frac{\overline{\overline{\sin(2.225')}}}{225}\right\} + \sin(2.225')$$
$$= 222 + \sin(2.225') = 671;$$

$$\sin(4.225') = \left\{222 - \frac{\overline{\overline{\sin(3.225')}}}{225}\right\} + \sin(3.225')$$
$$= 219 + \sin(3.225') = 890;$$

$$\sin(5.225') = \left\{219 - \frac{\overline{\overline{\sin(4.225')}}}{225}\right\} + \sin(4.225')$$
$$= 215 + \sin(4.225') = 1105;$$

et ainsi de suite.

Mais observons que, de ces relations, on tire aussi

$$224 = \sin(2.225') - \sin(1.225'),$$
$$222 = \sin(3.225') - \sin(2.225'),$$
$$219 = \sin(4.225') - \sin(3.225'),$$
$$215 = \sin(5.225') - \sin(4.225'),\ \text{etc.},$$

et, en substituant ces valeurs, on trouve que la méthode indienne s'exprime par la formule

$$\sin(\overline{n+1}.225') = \sin(n.225') - \sin(\overline{n-1}.225') - \frac{\sin(n.225')}{225} + \sin(n.225'),$$

ou

$$(1)\ \sin(\overline{n+1}.225') = \sin(n.225')\left(2 - \frac{1}{225}\right) - \sin(\overline{n-1}.225').$$

Or, on a

$$\sin(\alpha \pm \Delta\alpha) = \sin\alpha.\cos\Delta\alpha \pm \cos\alpha.\sin\Delta\alpha;$$

donc

$$\sin(\alpha + \Delta\alpha) + \sin(\alpha - \Delta\alpha) = 2 . \sin\alpha . \cos\Delta\alpha$$
$$= 2\sin\alpha\left(1 - 2\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2}\right),$$

ou

$$(2)\quad \sin(\alpha + \Delta\alpha) = \sin\alpha\left(2 - 4\sin^2\frac{\Delta\alpha}{2}\right) - \sin(\alpha - \Delta\alpha).$$

L'analogie remarquable qui existe entre cette dernière formule et celle à laquelle se ramène la méthode indienne, a été reconnue par M. Playfair (*) et constatée par M. Delambre (**).

M. Delambre fait remarquer (***) que M. Playfair « ne » dit pas pour quelle raison les Indiens se seraient bornés » aux arcs multiples de $3° 45'$ »; mais M. Delambre lui-même n'en dit rien non plus.

Cependant cette raison n'est pas bien difficile à trouver, et comme il importe, pour la question dont il s'agit ici, de bien éclaircir le rôle que joue l'arc de 225 minutes, auquel est resté le nom de *cramadjya* (sinus) par excellence, et, par suite, celui de *kardaga*, on voudra bien me permettre d'entrer à ce sujet dans quelques détails.

Les Indiens divisent la circonférence en degrés et minutes; connaissant le rapport de la circonférence au rayon (****), ils déterminent la valeur en minutes d'un arc égal au rayon, c'est-à-dire ils évaluent le rayon en mi-

---

(*) *Transactions of the royal Society of Edimburgh*, année 1798, tome IV, partie II, pages 83 et suivantes.

(**) *Histoire de l'Astronomie ancienne*, vol. I, pages 458 et suivantes.

(***) *Loc. laud.*, page 460.

(****) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, tome V, page 571, 6e note ajoutée par M. Marre à son excellente traduction de la partie géométrique de l'Algèbre de Mohammed-ben-Moussa.

nutes, et ils font $r = 3438'$, valeur exacte si l'on néglige les fractions de minute. Ils connaissent les formules

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ rayon} = 1719',$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{1 - \cos\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad r^2 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha\,;$$

conséquemment ils peuvent déterminer, par des bissections successives, les sinus de 15°, de 7° 30', de 3° 45', toujours exprimés en minutes.

Or, dans cette succession de sinus, celui de 3° 45' est *le premier qui contient le même nombre de minutes que l'arc auquel il correspond;* donc, si l'on ne demande qu'une exactitude aux minutes près, on s'arrêtera naturellement au sinus de 3° 45', parce que les sinus des arcs plus petits seront à plus forte raison égaux à ces arcs, et s'obtiennent par conséquent sans calcul. Par la même raison, ou encore à plus forte raison, il suffira, pour les intervalles compris entre les multiples de 3° 45', d'une simple interpolation, lorsqu'on ne demande les sinus qu'aux minutes près, attendu que le premier de ces intervalles, celui de 0° à 3° 45', est le plus grand de tous.

On voit maintenant pourquoi le sinus ou l'arc de 225' a pu être considéré comme l'élément fondamental de la Table des sinus, comme le sinus par excellence.

Mais cet arc (ou du moins un arc très-voisin de 225 minutes), jouit encore d'une autre propriété très-remarquable qui a échappé à M. Playfair et à M. Delambre, et qui pourra faire paraître la méthode indienne sous un jour tout nouveau.

On a pu remarquer qu'il figure dans l'exposé de la méthode indienne un *diviseur* 225. D'après la formule (2), ce diviseur devrait être

$$\frac{1}{4 \sin^2 \frac{225'}{2}} = 233,506,$$

ainsi que l'a fait remarquer M. Delambre, qui qualifie à deux reprises différentes (*) le chiffre 225 de simple faute d'impression, ou erreur de copie.

J'avoue qu'il m'a paru bien difficile d'admettre une faute d'impression répétée ainsi quatre fois de suite, toujours de la même manière. J'ai donc tâché de trouver la raison d'être de ce diviseur 225, identique au nombre de minutes dont les arcs de la Table indienne sont les multiples.

Or, la méthode indienne s'exprime, comme nous avons vu, par la formule

$$(1) \quad \sin(\overline{n+1}.x') = \sin(n.x')\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right) - \sin(\overline{n-1}.x')$$

Cette formule, dit-on, n'est pas exacte, n'est pas une identité. Donc, pour la rendre exacte, nous n'aurons qu'à déterminer la valeur de α qui la rend identique. En combinant la formule (1) avec l'identité

$$(2) \quad \sin(\overline{n+1}.x') = \sin(n.x')\left(2 - 4\sin^2\frac{x'}{2}\right) - \sin(\overline{n-1}.x'),$$

on obtient

$$(3) \qquad 4\alpha \sin^2\frac{x'}{2} = 1,$$

d'où

$$x' = 227' \, 48'',5,$$

valeur qui approche de 225' d'une manière si frappante,

(*) *Loc. laud.*, pages 458 et 460.

qu'il me paraît impossible de regarder cette coïncidence comme purement accidentelle. Certes, les Indiens n'ont probablement pas suivi cette marche. Mais en calculateurs excellents qu'ils étaient (et qu'ils sont encore aujourd'hui), ils auront découvert par résultats de calcul ce dont nous nous rendons compte par le raisonnement analytique.

Aussi ne suis-je pas éloigné de croire ce que M. Delambre paraît ne vouloir pas admettre, savoir : que les Indiens ont eu, outre la Table ci-dessus, qui n'était évidemment destinée qu'à des calculs où l'on ne demandait qu'une exactitude aux minutes près, d'autres Tables de sinus plus exactes (*).

Maintenant, pour revenir au nom *kardaga*, il paraît donc que ce terme et le terme indien *cramadjya* dont il est l'altération, ne signifiaient originairement que *sinus* simplement, les sinus d'une Table (**); qu'ensuite ce nom a été donné par excellence au sinus particulier, ou à

(*) Comparer le passage cité ci-après du *Mémoire sur l'Inde* de M. Reinaud, page 312.

(**) C'est ce qui résulte aussi d'un passage de l'ouvrage arabe intitulé : *Târikh Alhokamâ* (*Annales des Savants*) cité par M. Reinaud (*Mémoire sur l'Inde*, page 312), passage intéressant et qui peut donner lieu à quelques observations, que nous réservons pour une autre occasion. Cette citation est ainsi conçue : « En l'année 156 de l'hégire (773 de J.-C.), il arriva de » l'Inde à Bagdad un homme fort instruit dans les doctrines de son pays. » Cet homme possédait la méthode du Sindhind, relative aux mouvements » des astres et aux équations calculées au moyen de sinus de quart en » quart de degré. Il connaissait aussi diverses manières de déterminer les » éclipses, ainsi que le lever des signes du zodiaque. Il avait composé un » abrégé d'un ouvrage relatif à ces matières, qu'on attribuait à un prince » indien nommé Fygar. *Dans cet écrit, les kardagia étaient calculés par* » *minutes.* Le khalife ordonna qu'on traduisît le Traité indien en Arabe, » afin d'aider les musulmans à acquérir une connaissance exacte des étoiles. » Le soin de la traduction fut confié à Mohammed, fils d'Ibrahim-al-Fazary, le premier d'entre les musulmans qui s'était livré à une étude approfondie de l'astronomie : on désigna plus tard cette traduction, chez » les astronomes, sous le titre de *Grand Sindhind.* »

l'arc égal à ce sinus, qui formait un élément fondamental dans la construction de la Table indienne, et qu'on a fini par donner le même nom à d'autres arcs ou quantités jouant un rôle important dans la construction des Tables de sinus, par exemple à l'arc de 15 degrés, ainsi qu'on peut le voir dans la méthode de Purbach analysée par M. Delambre (*Hist. de l'Astron. du moyen âge*, p. 282).

Quant au mot *kardaga* même, on ne doit pas s'étonner que les Arabes aient modifié un peu le terme indien en l'adoptant, et qu'ils aient fait *kardadja* de *cramadjya*, de même qu'ils faisaient *sindhind* de *siddhanta*. Au reste, la transformation de *cramadjya* en *kardadja* pouvait se faire d'autant plus facilement, que la transcription arabe de *cramadjya* est *k r m d dj h*, et qu'il suffit d'omettre le *m*, figuré dans l'écriture arabe par un petit nœud, pour avoir *k r d dj h*, et pour prononcer *kardadja*. Lorsqu'on connaît les altérations parfois incroyables qu'ont subies des mots et des noms propres grecs en passant dans la langue ou dans les manuscrits arabes, la conjecture précédente n'a rien que de très-admissible.

Note du Rédacteur. — *Jya* en sanscrit est proprement la corde de l'arc avec lequel on tire; le nom du sinus en cette même langue est *djyva* (*); les Arabes ont adopté ce mot, et appellent le sinus *djib*. Mais en arabe ce même mot signifie une espèce d'élévation, sorte de poche formée par un vêtement, un *sinus vestis*, et les traducteurs l'ont pris dans ce sens-là. Ainsi l'origine de la dénomination du sinus trigonométrique tient à un quiproquo. *Djib* désigne aussi en arabe un réservoir d'eau, une citerne : double signification que présente aussi l'hébreu *gaba*, s'élever, s'enfler (d'où peut-être le *gibbus* latin); *guebe* est une citerne.

(*) Communiqué par le savant orientaliste Munk.

Quant au mot sanscrit *cramadjya* (sinus droit), il est formé de deux mots, *crama* et *djya :* le dernier signifie *sinus;* le premier vient de la racine *cram,* marcher, et désigne la *marche,* le *pied*, peut-être le pied-sinus, le sinus soutien principal, comme nous disons le pied droit; c'est très-conjectural.

QUESTIONS FONDAMENTALES SUR LES CONIQUES, CLASSÉES MÉTHODIQUEMENT.

1. *Notation.* a, b, c, etc., désignent des *points* par lesquels la conique cherchée doit passer.

A, B, C, etc., désignent des *droites* que la conique cherchée doit toucher.

A′, B′, C′, etc., désignent des *droites* que la conique cherchée doit toucher en des *points donnés*.

2. Dans toutes ces questions, il faut trouver, de grandeur et de position, un système de diamètres conjugués, sans décrire la conique, sans calculs et par des considérations tirées de la géométrie ancienne (Euclide, Apollonius) et de la géométrie contemporaine (Chasles, Poncelet, Steiner).

3. Les données sont

1. $a\ b\ c\ d\ e$,
2. $a\ b\ c\ d$ E,
3. $a\ b\ c$ D E,
4. $a\ b\ c$ D′,
5. $a\ b$ C D′,
6. a B C D′,
7. aB′C′,
8. A B C D E,
9. A B C D′,
10. A B′C′.

4. Mêmes données; une droite étant tracée dans le plan de la conique, trouver les points d'intersection avec la conique, sans décrire celle-ci et sans avoir recours à un système de diamètres conjugués.

Parabole et hyperbole équilatère.

5. Données :

1. $a\,b\,c\,d$,
2. $a\,b\,c\,D$,
3. $a\,b\,C\,D$,
4. $a\,b\,C'$,
5. $a\,B\,C\,D$,
6. $a\,B\,C'$,
7. $A\,B\,C\,D$,
8. $A\,B\,C'$,
9. $A'B'$.

Cercle.

6. Données :

1. $a\,b\,c$,
2. $a\,b\,C$,
3. $a\,B\,C$,
4. $a\,B'$,
5. $A\,B\,C$,
6. $A\,B'$.

Ici les grandes lettres A, B, C peuvent signifier aussi des cercles donnés.

Avis. On n'insérera pas de solution relative au paragraphe 6.

SUR LES RÉSIDUS DANS LA DIVISION ARITHMÉTIQUE;
D'APRÈS M. LEJEUNE-DIRICHLET (*).

1. Divisons le nombre entier p successivement par les n nombres $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$; on obtient n restes qui se divisent en trois classes :

A) restes égaux respectivement aux moitiés des diviseurs correspondants;

B) restes supérieurs à ces moitiés;

C) restes inférieurs à ces moitiés.

La classe C est plus fréquente que les deux autres classes; autrement, le nombre des diviseurs qui fournissent des restes inférieurs aux moitiés de ces diviseurs est plus considérable que le nombre des autres diviseurs, de sorte que si l'on désigne par n' le nombre des diviseurs qui fournissent la classe C, n croissant indéfiniment, on aura

$$\lim \frac{n'}{n} = 2 - \log 4 = 0,6137.$$

Dans le *Journal* de Crelle cité, M. L. D. résout le problème général, les restes étant inférieurs à une fraction quelconque du diviseur, et l'on fait usage d'une transformation ingénieuse qui peut avoir des applications nombreuses. C'est le type du génie de cet illustre analyste d'inventer, pour résoudre les problèmes particuliers, des procédés d'une admirable fécondité, et employés avec avantage dans des circonstances étrangères à celles qui ont donné naissance à ces procédés.

(*) *Mem. de l'Acad. de Berlin*, 1849. CRELLE, t. XLVII, p. 151, 1854.

Ce Mémoire est suivi d'un autre : *De formarum binariarum secundi gradus compositione*, et des considérations sur la première démonstration de M. Gauss, de la loi de réciprocité dans la théorie des résidus quadratiques. Nous annonçons ces travaux avec bonheur, car le long silence de certains hommes est une calamité (*).

M. Bienaymé, le savant académicien, a bien voulu nous communiquer la démonstration suivante :

Le quotient 1 répond à $\frac{n}{2}$ diviseurs ; parmi ceux-ci, il n'y a évidemment que les diviseurs compris entre $\frac{n}{2}$ et $\frac{2}{3}n$ qui peuvent donner des restes égaux ou supérieurs à leurs moitiés respectives ; ils ne sont donc qu'au nombre de

$$\frac{2}{3}n - \frac{1}{2}n = \frac{1}{6}n;$$

de même pour un diviseur d ayant un quotient q, il y aura des restes inférieurs au $\frac{1}{2}$ diviseur d, jusqu'à ce qu'on ait

$$n = dq + \frac{d}{2} \quad \text{ou} \quad d = \frac{2n}{2q+1};$$

de là à

$$d = \frac{n}{q+1}$$

il y aura au plus

$$\frac{2n}{2q+1} - \frac{n}{q+1} = \frac{n}{(q+1)(2q+1)}$$

diviseurs donnant des restes plus grands que leurs moitiés

(*) On a dit cela de Sieyès. Je n'ai jamais compris la justesse de cette plainte ; du moins d'après la vie publique de cet homme d'État.

respectives. Faisant successivement q égal à 1, 2, 3, le nombre de ces diviseurs sera au plus exprimé par la série

$$n\left[\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.7}+\ldots+\frac{n}{(q+1)(2q+1)}\cdots\right].$$

Lorsque n est infiniment grand, q est infini, et la série devient

$$(-1+\log 4)\,n;$$

donc le nombre des diviseurs donnant des restes inférieurs à leurs moitiés respectivement est $n\,(2-\log 4)$.

SOLUTION DES QUESTIONS 285-286;

(voir t. XII, p. 444);

PAR M. FAURE.

---

285. $u=0$ est l'équation rendue homogène d'une courbe plane de degré m entre trois variables x_1, x_2, x_3. Lorsque le déterminant de cette fonction est identiquement nul, l'équation représente un faisceau de m droites.

(O. HESSE).

D'après les notations de M. Hesse indiquées dans les *Nouvelles Annales*, tome X, page 124, la fonction u a six coefficients différentiels du second ordre :

$$u_{11},\quad u_{22},\quad u_{33},\quad u_{12},\quad u_{13},\quad u_{23},$$

et son déterminant D est donné par la relation

$$D=u_{11}u_{22}u_{33}+2\,u_{12}u_{13}u_{23}-u_{11}u_{23}^2-u_{22}u_{13}^2-u_{33}u_{12}^2.$$

Il serait identiquement nul si la fonction u, sans cesser de rester homogène, ne contenait que les deux variables x_1

et x_2, car la variable x_3 étant supposée nulle, les dérivées de la fonction u par rapport à cette variable le seraient aussi, et, par suite, le déterminant, puisque chacun de ses termes contient u_3. Mais, dans ce cas, on a

$$(1) \qquad u = F(a_1 x_1,\ a_2 x_2) = 0,$$

et l'équation $u = 0$ représente le système de m droites passant par un même point. Lors donc que l'équation $u = 0$ représente un faisceau de droites passant par l'origine des coordonnées, son déterminant est identiquement nul; prouvons maintenant la réciproque de cette propriété. A cet effet, j'opère un changement de coordonnées et je fais voir que l'équation que j'obtiens, fonction des nouvelles variables, est nécessairement de la forme (1), de sorte que nous aurons transporté l'origine des coordonnées au sommet du faisceau. Je poserai donc

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 y_1 + a_2 y_2 + \alpha_1 z, \\ x_2 &= b_1 y_1 + b_2 y_2 + \alpha_2 z, \\ x_3 &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + \alpha_3 z, \end{aligned}$$

mais en ne faisant entrer dans ces équations que deux variables indépendantes y_1, y_2, et regardant z comme une fonction de x_1, x_2, x_3 déterminée par ces équations. Les constantes a, b, c, α sont, du reste, quelconques. Je substitue les valeurs de x_1, x_2, x_3 dans la fonction u, et j'ordonne le résultat par rapport aux puissances de z. J'appelle U ce que devient u après la substitution des binômes

$$a_1 y_1 + a_2 y_2, \quad b_1 y_1 + b_2 y_2, \quad c_1 y_1 + c_2 y_2$$

à la place de x_1, x_2, x_3 : ce sera le premier terme du développement; d'après la loi de Taylor, le coefficient de z, que j'appellerai U', sera la valeur de

$$\alpha_1 \frac{du}{dx_1} + \alpha_2 \frac{du}{dx_2} + \alpha_3 \frac{du}{dx_3},$$

ou

$$x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$$

(d'après la notation de M. Hesse) lorsqu'on aura fait la substitution précédente. Quant aux autres termes, je les désigne par U'', U''', etc., leurs valeurs se déduisent facilement de U'. On aura ainsi

$$0 = U + U'z + U''\frac{z^2}{1.2} + U'''\frac{z^3}{1.2.3} + \ldots.$$

Or nous allons voir que le second terme de ce développement est identiquement nul, et, par suite, tous les suivants, de sorte que notre équation se réduit à

$$U = 0,$$

équation homogène et à deux variables y_1, y_2 qui représente un faisceau de m droites. Le déterminant D' de cette fonction sera identiquement nul, et par suite D, d'après la relation qui lie entre eux ces deux déterminants.

Pour démontrer que $U' = 0$, je désignerai par $2D_{12}$, $2D_{13}$, $2D_{23}$, les dérivées du déterminant D par rapport aux quantités u_{12}, u_{13}, u_{23}, et simplement par D_{11}, D_{22}, D_{33}, les dérivées du même déterminant par rapport à u_{11}, u_{22}, u_{33}. On voit facilement que l'on a la série d'équations :

$$\begin{aligned}
D_{11}u_{11} + D_{21}u_{21} + D_{31}u_{31} &= 0,\\
D_{11}u_{12} + D_{21}u_{22} + D_{31}u_{32} &= 0,\\
D_{11}u_{13} + D_{21}u_{23} + D_{31}u_{33} &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{12}u_{11} + D_{21}u_{21} + D_{31}u_{31} &= 0,\\
D_{12}u_{12} + D_{22}u_{22} + D_{32}u_{32} &= D,\\
D_{12}u_{13} + D_{23}u_{23} + D_{33}u_{33} &= 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{13}u_{11} + D_{23}u_{21} + D_{33}u_{31} &= 0,\\
D_{13}u_{12} + D_{23}u_{22} + D_{33}u_{32} &= 0,\\
D_{13}u_{13} + D_{23}u_{23} + D_{33}u_{33} &= D.
\end{aligned}$$

Comme l'on suppose que D est identiquement nul, tous les seconds membres de ces équations sont nuls ; de sorte que, si l'on regarde les quantités D_{11}, D_{21}, etc., comme inconnues, on aura trois systèmes d'équations dans lesquels les coefficients des inconnues sont les mêmes : par suite, leurs valeurs sont proportionnelles. Désignant par P une expression algébrique de degré $2(m-2)$, c'est-à-dire de même degré que les dérivées D_{11}, D_{21}, etc., et α_1, α_2, α_3 trois constantes, on pourra poser

$$D_{11} = \alpha_1 P; \quad D_{21} = \alpha_2 P; \quad D_{31} = \alpha_3 P;$$

il en résulte

$$D_{22} = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1} P; \quad D_{23} = \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\alpha_1}; \quad D_{33} = \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1}.$$

D'après le principe des fonctions homogènes,

$$u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + u_{13} x_3 = (m-1) u_1,$$
$$u_{21} x_1 + u_{22} x_2 + u_{23} x_3 = (m-1) u_2,$$
$$u_{31} x_1 + u_{32} x_2 + u_{33} x_3 = (m-1) u_3.$$

Je multiplie la première équation par D_{11}, la seconde par D_{12}, la troisième par D_{13}, puis j'ajoute, en ayant égard à notre système d'équations écrites ci-dessus,

$$D x_1 = (m-1)(D_{11} u_1 + D_{12} u_2 + D_{13} u_3) = 0.$$

Mettant ici à la place des dérivées de D leurs valeurs en fonction de P, on trouve

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0.$$

Cette démonstration s'applique d'elle-même à la question 286, de sorte que l'on peut énoncer ce théorème :

$u=0$ étant l'équation rendue homogène d'une surface de degré m entre quatre variables, si le déterminant de la fonction est identiquement nul, l'équation représente un cône. C. Q. F. D.

SOLUTION DES QUESTIONS 285-286

(voir t. XII, p. 444);

PAR M. FRANÇOIS BRIOSCHI,
Professeur à l'Université de Pavie.

Je me propose, dans cette Note, la démonstration des théorèmes suivants :

$u=0$ est l'équation rendue homogène d'une courbe plane de degré m entre trois coordonnées linéaires.

1°. *Lorsque le déterminant* (HESSIEN) Δ *de la fonction u est identiquement nul, l'équation représente un faisceau de m droites.*

2°. *Les points d'intersection des courbes représentées par les équations*

$$u=0, \quad \Delta=0,$$

sont des points d'inflexion ou des points doubles pour la première courbe.

$v=0$ est l'équation rendue homogène d'une courbe plane de la classe n entre trois coordonnées tangentielles (*)

(*) Rappelons que $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}$ étant les coordonnées à l'origine d'une tangente a une courbe, une équation entre z_1 et z_2 de degré n est l'équation de la *classe n*; on la rend homogène en écrivant $\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0}$ au lieu de z_1, z_2; le ∇ est relatif à cette sorte d'équations. TM.

3°. *Lorsque le déterminant* ∇ *de la fonction* v *est identiquement nul, l'équation représente des points situés sur une même droite.*

4°. *Les points d'intersection des courbes représentées par les équations* $v = 0$, $\nabla = 0$ *sont des points de rebroussement pour la première courbe.*

$u = 0$ *est l'équation rendue homogène d'une surface de degré* m *entre quatre coordonnées linéaires.*

5°. *Lorsque le déterminant* Δ *de cette fonction est identiquement nul, l'équation représente un cône.*

6°. *La ligne d'intersection des surfaces représentées par les équations* $u = 0$, $\Delta = 0$ *est une ligne d'inflexion (ligne des points paraboliques), pour la première surface.*

$v = 0$ *est l'équation rendue homogène d'une surface de la classe* n *entre quatre coordonnées planaires.*

7°. *Lorsque le déterminant* ∇ *de cette fonction est identiquement nul, l'équation représente une courbe plane.*

8°. *La ligne d'intersection des surfaces représentées par les équations* $v = 0$, $\nabla = 0$ *est une ligne de rebroussement pour la première surface.*

Soit u une fonction algébrique, entière et rationnelle, du degré m des variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Si l'on rend homogène l'équation $u = 0$ en posant, au lieu des variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$, les rapports $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \ldots, \frac{x_r}{x_0}$, et en multipliant par x_0^m, alors un théorème d'Euler, très-connu, nous donnera

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} (m-1)u_0 &= x_0 u_{0,0} + x_1 u_{0,1} + \ldots + x_r u_{0,r},\\ (m-1)u_1 &= x_0 u_{1,0} + x_1 u_{1,1} + \ldots + x_r u_{1,r},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (m-1)u_r &= x_0 u_{r,0} + x_1 u_{r,1} + \ldots + x_r u_{r,r},\\ mu &= x_0 u_0 \quad + x_1 u_1 + \ldots + x_r u_r, \end{aligned}\right.$$

où

$$u_s = \frac{du}{dx_s}, \quad u_{i,s} = u_{s,i} = \frac{d^2u}{dx_i\, dx_s}.$$

Ces formules donnent le moyen de transformer le déterminant suivant :

$$H = \begin{vmatrix} u_1, & u_{1,1}, & u_{1,2},\ldots, & u_{1,r} \\ u_2, & u_{2,1}, & u_{2,2},\ldots, & u_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_r, & u_{r,1}, & u_{r,2},\ldots, & u_{r,r} \\ 0, & u_1, & u_2,\ldots, & u_r \end{vmatrix}.$$

En effet, ce déterminant peut s'écrire

$$H = \frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} (m-1)u_1, & u_{1,1}, & u_{1,2},\ldots, & u_{1,r} \\ (m-1)u_2, & u_{2,1}, & u_{2,2},\ldots, & u_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (m-1)u_r, & u_{r,1}, & u_{r,2},\ldots, & u_{r,r} \\ 0, & u_1, & u_2,\ldots, & u_r \end{vmatrix};$$

et comme, en ajoutant respectivement aux éléments de la première colonne ceux de la deuxième multipliés par $-x_1$, ceux de la troisième multipliés par $-x_2$, etc., la valeur du déterminant H ne change pas, et, ayant égard aux équations (1), on aura

$$H = \frac{1}{m-1} \begin{vmatrix} x_0 u_{1,0}, & u_{1,1}, & u_{1,2},\ldots, & u_{1,r} \\ x_0 u_{2,0}, & u_{2,1}, & u_{2,2},\ldots, & u_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0 u_{r,0}, & u_{r,1}, & u_{r,2},\ldots, & u_{r,r} \\ x_0 u_0 - mu, & u_1, & u_2,\ldots, & u_r \end{vmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$H = -\frac{m}{m-1}u\begin{vmatrix} u_{1,1}, & u_{1,2},\ldots, & u_{1,r} \\ u_{2,1}, & u_{2,2},\ldots, & u_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{r,1}, & u_{r,2},\ldots, & u_{r,r} \end{vmatrix} + \frac{x_0}{m-1}\begin{vmatrix} u_{1,0}, & u_{1,1},\ldots, & u_{1,r} \\ u_{2,0}, & u_{2,1},\ldots, & u_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{r,0}, & u_{r,1},\ldots, & u_{r,r} \\ u_0, & u_1,\ldots, & u_r \end{vmatrix}.$$

J'observe que le second de ces deux déterminants est égal au suivant :

$$\frac{1}{m-1}\begin{vmatrix} u_{1,0}, & u_{1,1},\ldots, & u_{1,r} \\ u_{2,0}, & u_{2,1},\ldots, & u_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{r,0}, & u_{r,1},\ldots, & u_{r,r} \\ (m-1)u_0, & (m-1)u_1,\ldots, & (m-1)u_r \end{vmatrix};$$

ou, en répétant l'opération indiquée ci-dessus, en ayant soin toutefois de substituer les lignes aux colonnes, on aura

$$\frac{x_0}{m-1}\begin{vmatrix} u_{1,0}, & u_{1,1},\ldots, & u_{1,r} \\ u_{2,0}, & u_{2,1},\ldots, & u_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{r,0}, & u_{r,1},\ldots, & u_{r,r} \\ u_{0,0}, & u_{0,1},\ldots, & u_{0,r} \end{vmatrix},$$

et, par conséquent,

$$(2)\quad H = -\frac{m}{m-1}u\begin{vmatrix} u_{1,1}, & u_{1,2},\ldots, & u_{1,r} \\ u_{2,1}, & u_{2,2},\ldots, & u_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{r,1}, & u_{r,2},\ldots, & u_{r,r} \end{vmatrix} + (-1)^r\frac{x_0^2}{(m-1)^2}\Delta.$$

Analoguement, si v est une fonction algébrique entière rationnelle de degré n des variables $z_1, z_2, \ldots, z_r$, et si l'on pose

$$K = \begin{vmatrix} v_1, & v_{1,1}, & v_{1,2}, \ldots, & v_{1,r} \\ v_2, & v_{2,1}, & v_{2,2}, \ldots, & v_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_r, & v_{r,1}, & v_{r,2}, \ldots, & v_{r,r} \\ 0, & v_1, & v_2, \ldots, & v_r \end{vmatrix},$$

on aura

$$K = -\frac{n}{n-1} v \begin{vmatrix} v_{1,1}, & v_{1,2}, \ldots, & v_{1,r} \\ v_{2,1}, & v_{2,2}, \ldots, & v_{2,r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{r,1}, & v_{r,2}, \ldots, & v_{r,r} \end{vmatrix} + (-1)^r \frac{z_0^2}{(n-1)^2} \nabla.$$

Les déterminants Δ et ∇ sont respectivement des degrés $(r+1)(m-2)$ et $(r+1)(n-2)$.

Je suppose les variables $x_0, x_1, \ldots, x_r$; $z_0, z_1, \ldots, z_r$ liées par les deux systèmes d'équations

$$(3) \qquad \begin{cases} v_0 = x_0, & v_1 = x_1, & v_2 = x_2, \ldots, & v_r = x_r, \\ u_0 = z_0, & u_1 = z_1, & u_2 = z_2, \ldots, & u_r = z_r. \end{cases}$$

En prenant la dérivée de chacune des équations du premier système selon $x_0, x_1, \ldots, x_r$, en ayant égard aux équations du second système, on aura $(r+1)^2$ équations, lesquelles peuvent se déduire des deux suivantes :

$$v_{s,0} u_{s,0} + v_{s,1} u_{s,1} + \ldots + v_{s,r} u_{s,r} = 1,$$
$$v_{s,0} u_{i,0} + v_{s,1} u_{i,1} + \ldots + v_{s,r} u_{i,r} = 0,$$

en posant s et $i = 0, 1, 2, \ldots, r$. Ces équations nous donnent

$$(4) \qquad \Delta . \nabla = 1,$$

et, à cause des équations (3), on a, pour toutes les valeurs de $x_0, x_1, \ldots, x_r$ et de $z_0, z_1, \ldots, z_r$ qui satisfont aux équations $u = 0$, $v = 0$, la suivante :

$$x_0 z_0 + x_1 z_1 + x_2 z_2 + \ldots + x_r z_r = 0.$$

J'observe que si le déterminant Hessien Δ est identiquement nul, on a, par l'équation (2),

$$\begin{vmatrix} (m-1)u_1, & u_{1,1}, \ldots, & u_{1,r} \\ (m-1)u_2, & u_{2,1}, \ldots, & u_{2,r} \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ (m-1)u_r, & u_{r,1}, \ldots, & u_{r,r} \\ mu, & u_1, \ldots, & u_r \end{vmatrix} = 0$$

identiquement, et l'équation

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_r) = 0$$

est elle-même homogène. Analoguement si $\nabla = 0$ identiquement, l'équation

$$v(z_1, z_2, \ldots, z_r) = 0$$

est homogène.

Pour toutes les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_r$ qui satisfont à l'équation $u = 0$, et rendent $H = 0$, on a $\Delta = 0$.

Applications géométriques. Si l'on suppose $r = 2$ et $\Delta = 0$ ou $\nabla = 0$ identiquement, les équations

$$u(x_1, x_2) = 0, \quad v(x_1, x_2) = 0,$$

sont homogènes, et l'on a les théorèmes 1er et 3e.

Si l'on suppose $v = 3$ et $\Delta = 0$ ou $\nabla = 0$ identiquement, les équations

$$u(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad v(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

sont homogènes, et l'on a les théorèmes 5e et 7e (*).

(*) PLUCKER, *System der Geometrie des Raumes*, p. 17.

En désignant par R le rayon de courbure d'une courbe plane représentée par l'équation $u = 0$, on a

$$R = \pm \frac{(u_1^2 + u_2^2)^{\frac{3}{2}}}{H}.$$

Aux points d'inflexion de cette courbe, on a $R = \infty$, par conséquent $H = 0$, et

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} u_{0,0}, & u_{0,1}, & u_{0,2} \\ u_{1,0}, & u_{1,1}, & u_{1,2} \\ u_{2,0}, & u_{2,1}, & u_{2,2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation représentant une courbe plane du degré $3(m-2)$, les points d'inflexion de la proposée seront, en général, $3m(m-2)$. Aux points doubles de la courbe $u = 0$, on a

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0;$$

par conséquent $H = 0$, et l'équation (5) aura lieu aussi pour ces points (théorème 2^e^) (*).

Aux points de rebroussement de la courbe $v = 0$, on a $R = 0$, par conséquent $H = \infty$ et $\Delta = \infty$, ou, en ayant égard à l'équation (4),

$$\begin{vmatrix} v_{0,0}, & v_{0,1}, & v_{0,1} \\ v_{1,0}, & v_{1,1}, & v_{1,2} \\ v_{2,0}, & v_{2,1}, & v_{2,2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation du degré $3(n-2)$ représente une courbe plane, et les points de rebroussement de la proposée qui, en général, seront en nombre $3n(n-2)$, seront les

(*) *Voyez* l'excellent Traité de M. Salmon, *On the higher plane curves*, page 72.

points d'intersection de cette courbe avec la courbe $\nu = 0$ (théorème 4ᵉ) (*).

On doit se rappeler que les équations $u = 0$, $\nu = 0$ représentant une même courbe, on a

$$n = m(m - 1).$$

En dénotant par R_1, R_2 les rayons principaux de courbure d'une surface $u = 0$, on a

$$R_1 R_2 = \frac{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)^2}{H}.$$

Si l'un des deux rayons est infini, on a $H = 0$, par conséquent $\Delta = 0$. Cette équation représente une surface du degré $4(m - 2)$, et la ligne d'intersection de cette surface avec la surface $u = 0$ sera une ligne d'inflexion ou ligne des points paraboliques pour cette surface (théorème 6ᵉ) (**).

Si l'un des deux rayons est nul, on a $H = \infty$; par conséquent, $\nabla = 0$. Cette équation représente une surface de la classe $4(n - 2)$, et la ligne d'intersection de cette surface avec la surface $\nu = 0$ sera une ligne de rebroussement pour cette dernière surface (théorème 8ᵉ).

SUR LA CONSTRUCTION APPROCHÉE DU PENTAGONE RÉGULIER DITE DE DURER (ALBERT).

On sait que l'illustre artiste était géomètre, et a publié en 1525 l'ouvrage suivant : *Underweysung der Messung*

(*) *Journal* de Crelle, 1849. *Ueber curven dritter Classe und curven dritter Ordnung, von Her. prof. Hesse.*

(**) GERGONNE, *Annales de Mathématiques*, tome XXI, page 233.

The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 1848-1849. *On the condition that a plane* et *On the triple tangent planes, etc. By* M. Salmon.

mit dem Zirckel and Richtscheyt, in Linien, Ebenen und ganzen Corporen, durch Albrecht Durer, zusammengezogen und zu nutz aller kunstliebhabenden, mit zugehorigen Figuren in truck gerbracht im jar. M.D.X.X. C'est-à-dire : Instruction sur le mesurage avec le compas et la règle, en lignes, surfaces et corps entiers, réunie par Albert Durer, pour l'utilité de tous les amis des arts, et imprimée avec les figures convenables. Nuremberg, 1525. Cet ouvrage a été traduit en latin en 1535, et imprimé à Paris par Christian Wechel. Kästner donne une analyse détaillée de l'original (*Hist. des Math.*, tome I, page 684), et M. Chasles de la traduction (*Hist. des Méthodes*, page 530).

On trouve dans cet ouvrage de Durer la construction empirique du pentagone régulier que nous avons rapportée (p. 190).

Le Père Clavius, jésuite, démontre dans sa *Géométrie pratique* (*) que ce pentagone est équilatéral, mais pas équiangle. Deux angles sont de $107^\circ\,2'$; deux autres de $108^\circ\,22'$, et le cinquième de $109^\circ\,12'$: dans le vrai pentagone régulier, chaque angle est de 108 degrés.

Dans beaucoup de circonstances, cet *à peu près* suffit.

QUESTIONS DE MAXIMUM

Proposées par M. N. CIRIER,

Typographe-Correcteur.

1. Problème. *Construire un cône de révolution dont l'arête est donnée de longueur, et dont le volume est un maximum.*

(*) *Christophori Clavii Bambergensis e Societate Jesu Geometria practica; Moguntiæ*, 1606. In-4, lib. VIII, prop, 29, page 360.

Solution. Soit a la longueur de l'arête. Le rayon de la base est $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. et la hauteur est $\frac{a}{3}\sqrt{3}$ dans le cône à volume maximum.

Observation. La hauteur étant moindre que le rayon de la base, un cornet en papier, de cette forme ne se maintiendrait pas.

2. Problème. *On donne un rectangle de base b et de hauteur h; on mène deux parallèles aux petits côtés et deux parallèles aux grands côtés: de telle sorte que le rectangle soit partagé en un rectangle central, quatre rectangles latéraux et quatre carrés aux angles. On fait faire un quart de révolution aux quatre rectangles latéraux, et ils deviennent les quatre faces d'un parallélipipède rectangle. Quelles doivent être les dimensions de ce parallélipipède pour que son volume soit un maximum?*

Solution. Soit x la hauteur de ce parallélipipède; les deux autres dimensions seront

$$b - 2x, \quad h - 2x;$$

il faut donc rendre un maximum

$$x(b - 2x)(h - 2x).$$

La méthode connue donne

$$x = \frac{1}{6}\left[b + h \pm \sqrt{b^2 - bh + h^2}\right],$$

$$b - 2x = \frac{1}{3}\left[2b - h \mp \sqrt{b^2 - bh + h^2}\right],$$

$$h - 2x = \frac{1}{3}\left[2h - b \mp \sqrt{b^2 - bh + h^2}\right].$$

Pour le maximum, il faut prendre les signes inférieurs, le radical devient rationnel en faisant

$$h = \frac{b(1+2m)}{1-m^2},$$

$$x = \frac{b}{6}\left(\frac{1+2m}{1+m}\right),$$

m est un nombre quelconque.

Observation. Ces deux problèmes ont des applications dans le cartonnage.

ARITHMOLOGIE.

THÉORÈME SUR UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. LEBESGUE.

1. LEMME. *Tout nombre de la forme $4n+2$ est décomposable en trois carrés* (*voir* LEGENDRE, *Théorie des Nombres*, 2e édition, tome I, page 393).

Observation. Ce théorème est énoncé par Euler dans une lettre à Goldbach, datée de Berlin, 25 juin 1748 (*Corresp. math. et physique*, tome I, page 448). Il ajoute qu'il a vérifié que tout nombre de la forme $4n+1$ ou de la forme $4n+2$ est la somme de trois carrés (zéro non exclu); mais qu'il n'a pas pu encore en trouver la démonstration. On la doit à Legendre (*Hist. de l'Acad. de Paris*, 1785, page 507; voir aussi *Disquisitiones arithmeticæ*, page 504).

2. THÉORÈME. N *étant un nombre entier positif, on peut toujours satisfaire à l'équation*

$$4mn - m - n + x^2 + y^2 + y = \text{N}. \quad (\text{EULER.})$$

Démonstration. Cette équation peut se mettre sous la forme

$$[2(m+n)-1]^2-4(m-n)^2+4x^2+(2y+1)^2=4N+2;$$

d'où

$$[2(m+n)-1]^2+4x^2+(2y+1)^2=4[N+(m-n)^2]+2.$$

Le membre à droite est de la forme $4p+2$; donc, d'après le lemme, il est décomposable en trois carrés dont l'un doit être évidemment pair.

SUR UNE SURFACE DU TROISIÈME DEGRÉ QU'ON RENCONTRE EN MÉCANIQUE.

Soit l'équation d'une surface du troisième degré

$$\begin{aligned}(x+y)(y+z)(z+x)-c^2(x+y)-a^2(y+z)\\ -b^2(z+x)-2abc=0.\end{aligned}$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}(x+y)(xy-c^2)+(y+z)(yz-a^2)+(z+x)(xz-b^2)\\ -2(abc-xyz)=0;\end{aligned}$$

elle est satisfaite en posant

$$xy=c^2,\quad yz=a^2,\quad zx=b^2,$$

d'où

$$x=\frac{bc}{a},$$

$$y=\frac{ca}{b},$$

$$z=\frac{ab}{c}.$$

Si l'on a

$$xy>c^2,\quad yz>a^2,\quad zx>b^2,$$

les coordonnées ne peuvent être simultanément réelles.

Si l'on a

$$x = y = 0, \quad z = -\frac{2abc}{a^2 + b^2},$$

$$x = z = 0, \quad y = -\frac{2abc}{a^2 + c^2},$$

$$y = z = 0, \quad x = -\frac{2abc}{b^2 + c^2},$$

le plan

$$x + y + p = 0,$$

où p est une constante, coupe la surface suivant une hyperbole équilatère.

Observation. Cette équation est l'objet d'une de ces excellentes Notes dont M. J. Bertrand a enrichi la 3e édition de la *Mécanique analytique* (tome I, page 407) (*). C'est un travail accompli avec science et conscience; synthèse indispensable chez un éditeur, et qui devient très-rare. « A une époque où, sauf quelques honorables » exceptions, la publication d'un livre est une opération » purement mercantile, où les Traités des sciences sur» tout, taillés sur le même patron, ne diffèrent entre eux » que par des nuances de rédaction souvent impercep» tibles,..., on accomplit, je crois, un devoir en diri» geant l'attention des commençants vers les sources ori» ginales. » C'est ce que disait Arago en 1831, dans son éloge de Volta (*Mém. de l'Acad. des Sciences*, tome XII, page 73). M. Bertrand s'est pénétré de ce devoir en reproduisant un chef-d'œuvre de philosophie mathématique, brillant par l'unité de pensée, de plan, de méthode. Sans doute, dans un ouvrage de si haute portée, de si longue haleine, on s'aperçoit dans un petit nombre d'endroits que le génie de Lagrange est celui d'un homme. Ces inad-

(*) On lit une éloquente analyse de cette édition dans l'*Athenæum français* du 27 août 1853, par M. Alfred Maury, sous-bibliothécaire à l'Institut

vertances sont éminemment instructives, lorsqu'elles sont signalées et rectifiées par des géomètres tels que Poinsot, Binet, Bertrand. C'est ainsi que dans Euclide même, dans cet autel élevé à la logique géométrique, on rencontre cette grande inadvertance, cette confusion des solides égaux par superposition et par symétrie, inadvertance qu'Euler a si richement réparée. Il faudra toujours en revenir à ces grands maîtres, car « en fait de mathé-
» matiques, il n'y a à profiter que dans les méthodes et
» les livres qui ne consistent qu'en détails ou en propo-
» sitions particulières, ne sont bons qu'à faire perdre du
» temps à ceux qui les font et à ceux qui les lisent. »
[*Analyse des Infiniment petits*, préface (*).]

C'est en 1699 que L'Hospital faisait cette observation, et, en 1854, c'est vers ces boutiquiers en détail qu'on veut pousser la jeunesse, et qui y perdra, outre le temps, l'aptitude aux raisonnements abstraits, longuement enchaînés, l'aptitude aux profondes méditations.

NOTE SUR LES SECTIONS TORIQUES;

PAR M. GARLIN.
Docteur ès Sciences.

M. A. Serret a, le premier, fait connaître la véritable nature des sections toriques parallèlement à l'axe (*Journal de Mathématiques*, tome VIII, page 495, 1843). Je vais parler ici d'une propriété qui ne se trouve consignée nulle part, à ce que je sache. Elle consiste en ce qu'en coupant un tore déterminé par un plan parallèle à l'axe, la courbe d'intersection est la même que celle qu'on ob-

(*) Une Note de M. Bertrand sur les équations de Hamilton est devenue le sujet d'une belle thèse doctorale de M. Alfred Lafond sur laquelle nous nous proposons de revenir.

tient en cherchant le lieu géométrique des sommets des angles quelconques circonscrits à une certaine ellipse, dont il est facile de déterminer les éléments. Et réciproquement, la courbe du lieu des sommets des angles quelconques circonscrits à une ellipse déterminée, peut être obtenue en coupant un tore dont on détermine les éléments, par un plan dont on assigne la position.

Pour le faire voir, rappelons-nous que l'équation du tore est l'équation du quatrième degré

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-d\right)^2+z^2=R^2;$$

R étant le rayon de la circonférence génératrice, d la distance de son centre à l'axe de révolution, et l'origine des coordonnées le pied de la perpendiculaire abaissée de ce centre sur l'axe.

Soit

$$y=p$$

l'équation du plan sécant; la courbe d'intersection qui se projette en vraie grandeur sur le plan XZ a pour équation, dans ce plan,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&(x^2+z^2)^2+2(p^2-d^2-R^2)x^2+2(p^2+d^2-R^2)z^2\\ &\qquad -4d^2p^2+(d^2+p^2-R^2)^2=0.\end{aligned}\right.$$

Or la courbe relative aux sommets des angles α circonscrits à une ellipse dont les demi-axes sont a et b, a pour équation, en posant tang $\alpha=K$,

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}&(x^2+z^2)^2-2\left(a^2+b^2+\frac{2a^2}{K^2}\right)x^2-2\left(a^2+b^2+\frac{2b^2}{K^2}\right)z^2\\ &\qquad +(a^2+b^2)^2+\frac{4a^2b^2}{K^2}=0.\end{aligned}\right.$$

Supposons d'abord qu'on connaisse a, b et α. Il s'agit de voir si, par l'identification des équations (1) et (2), on peut trouver des valeurs réelles et finies pour les éléments d, R et p, relatifs au tore et au plan sécant.

Les équations de l'identification sont

$$d^2 + R^2 - p^2 = a^2 + b^2 + \frac{2a^2}{K^2},$$

$$R^2 - d^2 - p^2 = a^2 + b^2 + \frac{2b^2}{K^2},$$

$$(p^2 + d^2 - R^2)^2 - 4d^2p^2 = (a^2 + b^2)^2 + \frac{4a^2b^2}{K^2}.$$

Retranchant la deuxième de ces équations de la première, on trouve

$$d^2 = \frac{a^2 - b^2}{K^2}.$$

Ainsi en posant, comme d'ordinaire,

$$a^2 - b^2 = c^2,$$

la distance de l'axe de révolution au centre du cercle générateur sera égale à c cotang α.

La deuxième et la troisième équation donnent

$$p = \frac{b^2}{c \sin \alpha};$$

la position du plan sécant est ainsi déterminée.

D'ailleurs la première équation donne, pour le rayon de la circonférence génératrice, en y substituant les valeurs déjà trouvées,

$$R = \frac{a^2}{c \sin \alpha}.$$

Réciproquement, le tore étant défini d'avance, ainsi que la position du plan sécant, les trois équations de l'identification servent à déterminer les dimensions de l'ellipse et l'angle α.

En particulier, si l'angle est droit, le tore est remplacé par la sphère, car $d = 0$; et les valeurs

$$p = \frac{b^2}{c}, \qquad R = \frac{a^2}{c},$$

font connaître le rayon de cette sphère, et la position du petit cercle égal à celui du lieu géométrique.

L'équation (2) du quatrième degré à puissances paires n'est pas décomposable, en général, en facteurs du deuxième degré. On s'en assure en identifiant le premier membre au produit de deux polynômes du deuxième degré en x et y, et l'on voit que l'on n'a de coefficients réels pour ces polynômes que quand $a = b$, c'est-à-dire quand l'ellipse devient un cercle. Alors on trouve deux circonférences pour le lieu; l'une se rapporte à l'angle donné, et l'autre à l'angle supplémentaire. C'est effectivement ce que l'on trouve quand on traite directement la question pour le cercle. On peut encore démontrer l'impossibilité de la décomposition en facteurs, en résolvant l'équation par rapport à z, et cherchant alors la condition pour que la quantité placée sous le radical soit un carré parfait.

Note. Pour l'hyperbole équilatère, le lieu des sommets des angles égaux circonscrits est une cassinoïde. MM. William Roberts et Tortolini ont publié, sur cette courbe, de belles études qui se rattachent aux fonctions elliptiques. (*Journal* de Liouville et *Raccolta scientifica*.) Lorsque $p = R$ sans que d soit nul, l'identification devient impossible. Un cas spécial est celui où $p = d - R$; l'équation (2) ne se rapportant qu'à l'ellipse, n'est pas assez générale. TM.

π EXPRIMÉ EN 333 CHIFFRES.

(*Arch. de Mathématiques* de Grunert, t. XXI, p. 119; 1853.)

Le professeur Richter, à Elbing, a fait ce calcul. Les 200 premiers chiffres sont les mêmes que ceux de

M. Dahse (tome IX, page 12) qui sont ainsi vérifiés. Voici les 133 nouveaux chiffres :

44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165
27120 19091 45648 56692 34603 48610 45432 66482
13393 60726 02491 41273 72458 70066 06315 58817
48815 20920 098...

D'après ce calcul, les 56 dernières décimales de M. Rutherford ne sont pas exactes (tome X, page 198). Dans ces 133 nouveaux chiffres, les 73 premiers sont vérifiés par un travail de M. le professeur Lehmann, à Postdam (*Arch. de Math.*, tome XXI, page 159; 1853).

Ainsi 273 chiffres sont contrôlés.

Ce Mémoire de M. Lehmann est très-remarquable, le plus complet qui existe pour le calcul de π; on y trouve cette curieuse observation : Si l'on voulait calculer le volume d'une sphère ayant pour rayon un trillion de milles (*), éloignement de la nébuleuse la plus éloignée observée jusqu'à ce jour d'après l'estimation de Herschell, et calculer avec une exactitude telle, que l'erreur soit moindre que la plus petite grandeur microscopique, moindre qu'un cube d'un deux-millionième de pouce de côté, il suffirait de prendre π avec 90 décimales.

Que devient en comparaison l'arénaire d'Archimède?

Ludolf van Ceulen a calculé ses 35 décimales, sans séries, à la manière d'Archimède, par des extractions successives de racines carrées.

Sharp, Machin et Lagny se sont servis de la série

$$\pi = 6 \text{ arc tang} \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{12}\left(1 - \frac{1}{3^1.3} + \frac{1}{3^2.5} - \frac{1}{3^3.7} \cdots\right).$$

M. Lehmann trouve que, pour avoir π par cette série avec 100 décimales exactes, il faut 207 termes, chacun

(*) Le mille d'Allemagne est de deux lieues environ.

avec 103 décimales. Lagny a trouvé 127 chiffres. Il faudrait calculer 263 termes, chacun avec 130 décimales; mais il paraît que Lagny a trouvé les 27 dernières décimales à l'aide d'un artifice qu'on ne connaît pas. M. Lehmann conjecture qu'il a fait usage d'une partie de la série négligée par Machin; savoir :

$$\frac{\sqrt{12}}{3^{207}.415}\left\{\begin{array}{l} 1-\frac{415}{417}\cdot\frac{1}{3^1}+\frac{415}{417}\cdot\frac{417}{419}\cdot\frac{1}{3^2} \\ -\frac{415}{417}\cdot\frac{417}{419}\cdot\frac{419}{421}\cdot\frac{1}{3^3}+\dots \end{array}\right\}.$$

Convertissant cette série en une autre plus convergente, Lagny a pu se servir de cette expression

$$\begin{aligned} \pi = &\sqrt{12}\left(1-\frac{1}{3^1.3}+\frac{1}{3^2.5}-\frac{1}{3^3.7}+\dots\right) \\ &-\frac{\sqrt{3}}{3^{206}.830}\left\{\begin{array}{l} 1+\frac{2}{417}\cdot\frac{1}{4^1}+\frac{2}{417}\cdot\frac{4}{419}\cdot\frac{1}{4^2} \\ +\frac{2}{417}\cdot\frac{4}{419}\cdot\frac{6}{421}\cdot\frac{1}{4^3}+\dots \end{array}\right\}, \end{aligned}$$

et, par un calcul très-compliqué, M. Lehmann trouve qu'il faudra calculer 219 termes, chacun avec 130 décimales, pour obtenir π avec 127 chiffres exacts; ainsi on aura à calculer 44 termes de moins que d'après la première série. On a obtenu cette réduction en réduisant les 56 derniers termes de 263 à 12 termes. L'auteur se propose ensuite cette question : Où faut-il s'arrêter dans le développement de la série générale pour réduire le calcul au moindre nombre de termes. Il applique ces considérations à ces expressions de

$$\begin{aligned} \pi &= 4\left(\text{arc tang}\,\frac{1}{2}+\text{arc tang}\,\frac{1}{5}+\text{arc tang}\,\frac{1}{8}\right) \\ &= 8\,\text{tang arc}\,\frac{1}{3}+4\,\text{arc tang}\,\frac{1}{7} \\ &= 4\left(\text{arc tang}\,\frac{1}{2}+\text{arc tang}\,\frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

On a la formule ordinaire

$$\text{arc tang}\, \varphi = \varphi - \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{1}{5}\varphi^5 + \ldots + \frac{1}{2q-1}\varphi^{2q-1} + \ldots,$$

en tout q termes.

L'auteur convertit les r derniers de ces q termes en une autre série convergente, et trouve

$$\text{arc tang}\, \varphi = \varphi - \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{1}{5}\varphi^5 - \text{R},$$

$$\text{R} = \frac{1}{2q-2r+1}\cdot\frac{\varphi^{2q-2r+1}}{1+\varphi^2}\left\{\begin{aligned}&1 + \frac{2}{2q-2r+3}\cdot\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}\\ &+ \frac{2.4}{(2q-2r+3)(2q-2r+5)}\left(\frac{\varphi^2}{1+\varphi^2}\right)^2\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}.$$

Nous ne pouvons pas suivre l'auteur dans ses calculs qui remplissent une trentaine de pages. Nous devons nous contenter de savoir que M. Lehmann indique combien il faut prendre de termes pour avoir successivement les nombres de Ludolf, Sharp, Machin, Lagny, Vega, Dahse et les 73 premiers chiffres de M. Richter; d'autres moyens sont indiqués pour passer plus loin. Nous ne connaissons pas de meilleure étude sur les méthodes d'approximation dont il est maintenant si souvent question.

2. En 1852, une brochure in-4 de 10 pages a été publiée à Besançon sous le titre : *Démonstration de l'impossibilité de rectifier exactement la circonférence du cercle,* par Numa Boyé, ingénieur des Mines, ancien élève de l'Ecole Polytechnique (*).

Par des considérations fonctionnelles, l'auteur parvient à la formule connue

$$z\sqrt{-1} = \log(\cos z + \sqrt{-1}\,\sin z).$$

(*) Je dois cette brochure à l'obligeance de mon collègue, M. Renaud-Ducreux, professeur à l'École d'Artillerie de Besançon.

[L'auteur désigne e^x par E (x) et log x par $\overline{\mathrm{E}}$ (x) ; cette notation n'a pas d'importance logique.]

Faisant

$$z = \frac{\pi}{2},$$

on a

$$\frac{\pi}{2}\sqrt{-1} = \log\sqrt{-1};$$

d'où

$$\frac{\pi}{2} = -\sqrt{-1}\log\sqrt{-1}.$$

L'auteur ajoute : « Cette formule étant exactement dé-
» duite, ne comporte que les deux hypothèses suivantes :
» ou bien elle est une identité, ou bien elle est une équa-
» tion, c'est-à-dire une relation déterminée, pouvant être
» exactement satisfaite par une quantité déterminée. »

Il s'attache ensuite à prouver que les deux cas ne sont pas admissibles. Donc il n'existe pas d'expression algébrique possible entre la circonférence et le rayon. On peut répondre que cette expression n'est ni une identité, ni une équation proprement dite. C'est un symbole mnémonique relatif à des développements en série. Si, dans log x développé en série, on fait $x = \sqrt{-1}$, et qu'on multiplie ensuite tous ses termes par $\sqrt{-1}$, on obtient une seconde série réelle, et qui a pour limite $\frac{\pi}{2}$. Il faut donc encore s'en tenir à la démonstration de Lambert.

La géométrie démontre que le côté du carré divisé par la diagonale donne un quotient constant, et que ce quotient est irrationnel ; la géométrie démontre encore que la circonférence divisée par le diamètre donne un quotient constant. La géométrie est sans doute capable de démontrer que ce quotient est irrationnel ; mais les géomètres sont encore incapables de donner cette démonstration. Il faut toujours distinguer entre la géométrie et les géomètres ; comme entre l'analyse et les analystes. La science peut tout, elle est Dieu ; mais pas les savants, ce sont des hommes (*).

UNIVERSITÉ DE PARIS.

Question proposée pour le Baccalauréat ès Sciences (4 avril 1854).

On demande le poids d'un tombereau de terre dont les dimensions sont les suivantes :

Profondeur $0^m,75$;
Largeur du fond $0^m,52$;
Longueur du fond $0^m,86$;
Largeur du bord supérieur $0^m,82$;
Longueur du bord supérieur $0^m,88$.

Il est rempli *à ras du bord;* il est à fond plat, la densité de la terre est $2^m,65$.

Soient δ la profondeur, a, a' les deux longueurs, b, b' les deux largeurs, V le volume. On a

$$V = \frac{1}{6}\delta[(2a + a')b + (2a' + a)b'].$$

Le poids cherché est $1172^{kil},634$, calculé par M. Koralek.

Cette formule simple, de M. Catalan, est un cas particulier du théorème de M. Sarrus, énoncé t. VII, p. 244, des *Nouvelles Annales*.

Convenons que c'est une bien belle chose que les *mathématiques enseignées au point de vue de leurs applications*, bien propre à agrandir, à ennoblir l'intelligence

(*) Pascal fait une distinction entre les discussions de théologie et de théologiens ; même distinction à faire entre les discussions d'astronomie et d'astronomes.

juvénile, à l'âge poétique de la vie. Il est à regretter qu'on ne donne jamais de questions universitaires sur la tenue des livres; on les réserve peut-être pour la Licence ès Sciences. *Argentum tuum versum est in scoriam; vinum tuum mistum est aquâ; principes tui infideles* (*); *omnes diligunt munera, sequuntur retributiones* (Isaias, I, 21, 22).

FACULTÉ DE PARIS.

Agrégation pour les lycées (Sciences), 1854.

Question. Exposer une méthode simple et pratique pour obtenir un produit et un quotient à une unité près d'un ordre décimal donné. Erreurs relatives des données et des résultats. Calculer à cent unités près, à l'aide de cette méthode, le rayon d'un cercle dont la circonférence *serait* de quarante millions de mètres.

Observation. Lisez : calculer le rayon d'une circonférence de tant de mètres. Pourquoi la forme germanique *serait?* On est tenté de croire que ce sont les professeurs de langue allemande qui rédigent certaines questions universitaires.

NOTE SUR LES PUISSANCES DES NOMBRES

(voir t. IV, p. 637; t. V, p. 25; DROT).

1. Euclide montre par la géométrie la composition du carré du binôme; on peut montrer de la même ma-

(*) Selon la Vulgate. Le vrai sens est *perversi*: c'est ce qu'exprime le mot hébreu *sorerim*.

nière le carré du trinôme, du quadrinôme et d'un polynôme quelconque; c'est une observation de M. Faraguet. La géométrie suffit aussi pour faire voir très-simplement la composition du cube du binôme; mais la complication augmente avec le nombre de termes.

Euclide montre l'identité $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; on pourrait encore montrer les identités

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$
$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Les puissances supérieures au cube dépassent les limites de l'étendue.

2. Soit $(a \,.\, 10^n + b^m)$, où a, b, m, n sont des nombres entiers positifs; supposons que b, m, n sont des nombres constants et que a seul varie : les n premiers chiffres à droite restent les mêmes. Cette propriété donne le moyen de raccourcir les Tables des puissances des nombres, en disposant ces nombres suivant une progression arithmétique dont la raison est 10^n; tant que b ne change pas, les n premiers chiffres à droite, une fois écrits, servent toujours. M. Caillet, auteur d'un excellent Traité de Navigation (*), a mis ainsi sur une seule page les carrés des nombres de 1 à 1600 (t. I, p. 197). Les Tables de Büchner donnent les carrés et les cubes des nombres de 1 à 12000; si l'on adopte la méthode de M. Caillet, on pourrait facilement étendre ces Tables jusqu'à 100000, sans une augmentation de volume. On a remarqué depuis longtemps que les Tables des carrés peuvent servir à effectuer des multiplications, d'après l'identité

$$ab = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2.$$

(*) *Traité élémentaire de Navigation*, à l'usage des officiers de la marine militaire et de la marine du commerce; par V. Caillet, examinateur de la marine. Brest, 1848; 2 vol. in-8.

DÉMONSTRATION DE QUELQUES PROPOSITIONS D'ARITHMÉTIQUE D'APRÈS EUCLIDE;

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

Une propriété des nombres, dont on ne peut se passer même dans les éléments, c'est que *le produit de deux nombres premiers avec un troisième est premier avec ce troisième nombre*. Pour l'établir, je donne la préférence à la démonstration d'Euclide, qui me paraît la plus simple, et qu'on abrége beaucoup par l'emploi des notations modernes. Il est vrai qu'on a besoin de prouver d'abord quelques autres propositions; mais celles-ci ne sont pas sans intérêt : au contraire, je les crois essentielles dans la théorie de la réduction des fractions. Cette démonstration revient à ce qui suit.

1. Si $\frac{a}{b}$ est la plus simple des fractions équivalentes à une fraction déterminée $\frac{p}{q}$, a sera un diviseur de p, et b un diviseur de q.

Démonstration. Si a est un diviseur de p, on aura

$$p = ma,$$

m étant entier; mais

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q},$$

et, par suite,

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{q},$$

d'où

$$q = mb:$$

donc b sera aussi un diviseur de q. Si a n'est pas un diviseur de p, divisons p par a, et soient m le quotient, a' le reste : nous aurons

$$p = ma + a',$$

et comme $\frac{q}{b} = \frac{p}{a}$, il s'ensuivra

$$\frac{q}{b} = m + \frac{a'}{a}.$$

Or, la fraction $\frac{a'}{a}$ étant inférieure à l'unité, il est clair qu'en divisant q par b on obtiendra m pour quotient entier avec un reste $b' < b$, et qu'ainsi

$$\frac{q}{b} = m + \frac{b'}{b}.$$

En comparant les deux valeurs de $\frac{q}{b}$, on a

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}, \quad \text{ou} \quad \frac{a'}{b'} = \frac{a}{b} = \frac{p}{q}:$$

on trouverait donc une fraction $\frac{a'}{b'}$ équivalente à $\frac{p}{q}$ et plus simple que $\frac{a}{b}$.

2. Si p et q sont deux nombres premiers entre eux, $\frac{p}{q}$ sera la plus simple de toutes les fractions ayant même valeur.

Car, si la plus simple était une autre fraction $\frac{a}{b}$, a serait un diviseur de p, et b un diviseur de q (1), et l'on aurait

$$p = ma, \qquad q = mb,$$

m étant un entier supérieur à l'unité : par conséquent, p et q auraient un facteur commun m.

3. Si b est premier avec a, b sera premier avec tout nombre c diviseur de a.

En effet, si b et c avaient un facteur commun d, ce facteur diviserait exactement a qui est un multiple de c : on aurait donc

$$b = md, \qquad a = nd,$$

et d serait un diviseur commun de a et b.

4. Si a et b sont premiers avec c, leur produit $ab = p$ sera aussi premier avec c.

Démonstration. Supposons que p et c aient un diviseur commun q ; a, premier avec c, sera premier avec q diviseur de c (3), et, d'ailleurs, on aura

$$p = mq,$$

m étant entier, ou

$$ab = mq,$$

d'où

$$\frac{a}{q} = \frac{m}{b}.$$

Donc $\frac{a}{q}$ sera la plus simple des fractions équivalentes à $\frac{m}{b}$ (2); donc q sera un diviseur de b (1). Ainsi b et c auraient un diviseur commun q, tandis qu'ils sont donnés comme premiers entre eux.

Ces quatre théorèmes coïncident, dans le même ordre, avec les propositions 21, 23, 25, 26 du VII^e livre d'Euclide, et je n'ai changé que la démonstration du premier théorème. Le troisième pourrait être omis comme assez évident.

REMARQUES SUR UN THÉORÈME DE M. BRIOSCHI ET SUR LA QUESTION 267

(voir t. XI, p. 402, et t. XII, p. 167);

PAR M. ANGELO GENOCCHI.

Soient $A_1, \ldots, A_5$ cinq points situés sur un ellipsoïde; A_r l'un quelconque d'entre eux; v_r le volume du tétraèdre ayant pour sommets les quatre autres points; M un sixième point; D_r le demi-diamètre de l'ellipsoïde parallèle à MA_r; d_r la distance MA_r : on aura

$$\sum \pm \frac{d_r^2}{D_r^2} v_r = 0.$$

M. Brioschi a donné ce théorème en supposant le point M situé aussi sur l'ellipsoïde, et il a remarqué que, dans le cas d'une sphère, le théorème a lieu quoique M ne soit pas un point de la surface. Il est facile de démontrer que cette observation doit être étendue au cas d'un ellipsoïde quelconque. Soient, en effet,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

l'équation de l'ellipsoïde, et

$$y = px, \qquad z = qx,$$

celles du demi-diamètre D_r : les coordonnées de l'extrémité de D_r seront

$$x = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}\right)}}, \quad y = \frac{p}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}\right)}},$$

$$z = \frac{q}{\sqrt{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}\right)}}.$$

Par suite, on aura

$$D_r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1 + p^2 + q^2}{\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}},$$

ou

$$\frac{1}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2} = \frac{1 + p^2 + q^2}{D_r^2}.$$

Or, si α, β, γ sont les coordonnées du point M, et x_r, y_r, z_r celles de A_r, on aura

$$d_r^2 = (\alpha - x_r)^2 + (\beta - y_r)^2 + (\gamma - z_r)^2;$$

de plus, D_r et MA_r étant parallèles, il s'ensuit

$$p = \frac{\beta - y_r}{\alpha - x_r}, \qquad q = \frac{\gamma - z_r}{\alpha - x_r}:$$

donc l'équation précédente deviendra

$$\frac{(\alpha - x_r)^2}{a^2} + \frac{(\beta - y_r)^2}{b^2} + \frac{(\gamma - z_r)^2}{c^2} = \frac{d_r^2}{D_r^2}.$$

On voit que cette formule a lieu quelles que soient les positions des points M et A_r. En supposant que A_r soit sur l'ellipsoïde, et faisant

$$\rho = 1 + \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2},$$

nous trouvons

$$\rho - \frac{2\alpha}{a^2} x_r - \frac{2\beta}{b^2} y_r - \frac{2\gamma}{c^2} z_r = \frac{d_r^2}{D_r^2},$$

qui représente cinq équations correspondant à

$$r = 1, 2, \ldots, 5,$$

entre les quatre mêmes quantités

$$\rho, -\frac{2\alpha}{a^2}, -\frac{2\beta}{b^2}, -\frac{2\gamma}{c^2} \ (*).$$

(*) C'est sans doute par inadvertance que M. Brioschi nomme, parmi les quatre inconnues, l'expression $\frac{1}{2}\frac{dr}{D_r^2}$ qui, variant d'une équation à l'autre, représente cinq quantités, et qui reparaît dans le déterminant.

Leur déterminant, que je désignerai par

$$\text{dét.}\left(1,\ x_r,\ y_r,\ z_r,\ \frac{d_r^2}{D_r^2}\right),$$

sera donc nul, et, en le développant, on aura

$$\sum \pm \frac{d_r^2}{D_r^2}\ \text{dét.}\,(1,\ x_{r'},\ y_{r'},\ z_{r'}) = 0,$$

où r' désigne ceux des nombres $1, 2, \ldots 6$, qui sont différents de r. Mais comme

$$v_r = \frac{1}{6}\ \text{dét.}\,(1,\ x_{r'},\ y_{r'},\ z_{r'}),$$

on conclut

$$\sum \pm \frac{d_r^2}{D_r^2}\, v_r = 0.$$

Pour la sphère, on a

$$\sum \pm v_r\, d_r^2 = 0,$$

et si le point M coïncide avec A_s, il en résulte

$$v_1 d_1^2 - v_2 d_2^2 + v_3 d_3^2 - v_4 d_4^2 = 0,$$

puisque $d_s = 0$. Cette équation particulière a été donnée par M. Bellavitis dans les *Annali* de M. Tortolini, 1853, page 204. M. Bellavitis croit que la relation

$$\sum v_r d_r = 0,$$

analogue aux précédentes, et qui forme le sujet de la question 267, est erronée. Il me semble que son opinion peut être justifiée, en considérant un cas particulier très-simple, celui où les points A_1, A_2, A_3, A_4 seraient les sommets d'un quadrilatère plan rectangle. Dans ce cas, le tétraèdre v_s s'évanouit, et les autres v_1, v_2, v_3, v_4

sont équivalents, comme ayant pour hauteur commune la distance de A_r au plan du rectangle $A_1 A_2 A_3 A_4$, et pour base la moitié de ce rectangle. La relation

$$\sum \pm v_r d_r^2 = 0,$$

qui a lieu pour la sphère, devient donc

$$d_1^2 - d_2^2 + d_3^2 - d_4^2 = 0,$$

et en même temps la relation

$$\sum v_r d_r = 0,$$

donnera

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0.$$

Or il est aisé de se convaincre que ces deux équations ne peuvent subsister ensemble pour toutes les positions du point M sur la sphère, car les distances d_1, d_2, d_3, d_4 devraient être égales deux à deux, et, par conséquent, le point M serait situé sur un plan diamétral perpendiculaire à deux côtés parallèles du rectangle $A_1 A_2 A_3 A_4$.

SUR LES SONS HARMONIQUES;

MERSENNE.

On attribue ordinairement à Rameau (*) la découverte des sons harmoniques qu'un corps sonore fait entendre simultanément. Voici ce qu'on lit dans l'*Harmonie universelle* du P. Mersenne, imprimée en 1636.

C'est la proposition 11 du livre IV des Instruments, page 208.

« *Déterminer pourquoy une chorde touchée à vuide* » *fait plusieurs sons en mesme temps.*

» Il semble qu'Aristote a cogneu cette expérience,

(*) Né à Dijon en 1683, mort en 1764.

» lorsqu'il a fait la question pourquoy le son grave con-
» tient l'aigu dans le huitiesme problesme de la dix-neu-
» viesme section, pourquoy il devient plus aigu en finis-
» sant dans l'onziesme : à quoy l'on peut rapporter le
» douziesme et le treiziesme problesme, et d'où plusieurs
» autres problesmes de la mesme section peuvent être en-
» tendus, de sorte que cette proposition est fort utile pour
» la philosophie d'Aristote; mais il faut remarquer qu'il
» n'a pas sceu que la chorde frappée et sonnée à vuide
» fait du moins cinq sons différents en mesme temps dont
» le premier est le son naturel de la chorde qui sert de
» fondement aux autres et auquel on a seulement esgard
» pour le chant et la partie de la musique, d'autant que
» les autres sont si foibles, qu'il n'y a que les meilleures
» oreilles qui les entendent aysément.... Quant à moy,
» ie n'y ay nulle difficulté, et j'ay rencontré plusieurs
» musiciens qui les entendent aussi bien que moy.... Or
» ces sons suivent la raison de ces nombres 1, 2, 3, 4, 5,
» car l'on entend quatre sons différents du naturel, dont
» le premier est à l'octave en haut, le second à la dou-
» ziesme, le troisiesme à la quinziesme et le quatriesme
» à la dix-septiesme majeure, comme l'on void par lesdits
» nombres qui contiennent les raisons de ces conson-
» nances en leurs moindres termes.... Outre ces quatre
» sons extraordinaires, i'en entends encore un cin-
» quiesme plus aigu (*), que i'oy particulièrement vers
» la fin du son naturel et d'autres fois un peu avant le
» commencement; il fait la vingtiesme majeure avec le
» son naturel, avec lequel il est comme 3 à 20. Mais j'ex-
» périmente quasi toujours que la douziesme et la dix-sep-
» tiesme s'entendent plus distinctement que les autres. »

(*) Ceci annonce une ouïe d'une extrême finesse, telle qu'on la rencontrait chez le célèbre physicien Savart et chez son frère le Commandant du Génie.

Il cherche ensuite la cause du phénomène, énonce la véritable, mais paraît la rejeter. Attribuant tout son aux battements de l'air, il ajoute : « Si ce n'est que l'on die que la moitié de la chorde le bat deux fois, tandis que la chorde entière le bat une fois, et qu'en mesme temps la troisiesme, quatriesme et cinquiesme partie le battent trois, quatre et cinq fois : ce qui est contre l'expérience. » On voit qu'il ne connaissait pas l'existence des *nœuds;* il croit qu'il faut chercher l'explication dans les battements de l'air extérieur et en donne des raisons fort vagues. Il répète cette expérience avec des cloches.

L'*Harmonie universelle* du célèbre minime, ouvrage in-folio de 1049 pages, est une macédoine de renseignements littéraires, scientifiques, physiques, artistiques, technologiques, etc. On y trouve la Mécanique de Roberval; la Rhythmique poétique des Anciens et la Rhythmique française; la théorie des échos, des combinaisons; la page 108 est une Table des permutations de tous les nombres de 1 à 64 : pour 64 il y a 90 chiffres compris 14 zéros; à la page 112, on lit les futiles 720 permutations des six notes *ut, ré, mi, fa, sol, la;* la construction de tous les instruments de musique du XVII^e siècle et la manière de les jouer; l'anatomie complète des organes de la voix; des expériences sur les sons rendus par divers métaux, divers bois, sur la vitesse et sur la durée des sons, etc (*). A la page 55 il indique les mouvements qu'il faut faire pour prononcer les voyelles et les consonnes : ce qui a peut-être donné lieu à la scène du *Bourgeois-Gentilhomme*. Il propose la construction d'un clavecin dont les tons sont divisés en quatre parties pour faire les dièzes enharmoniques (p. 215). Un instrument semblable a été proposé et construit par M. Vincent,

(*) Ces expériences méritent d'être vérifiées par notre habile physicien M. Wertheim, qui a fait de l'élasticité une étude spéciale et approfondie et l'objet d'une savante thèse doctorale.

membre de l'Académie des Inscriptions. Mersenne croit qu'il faut se servir de l'orgue pour apprendre à chanter aux enfants. Vers la fin de l'ouvrage, il traite de l'artillerie, des portées des pièces, du tir des flèches. Le livre dixième de *l'Art de chanter* contient une méthode de des Argues pour apprendre la musique aux enfants, et beaucoup de renseignements sur divers personnages du temps; ainsi le livre des *Orgues* est dédié au père de Pascal, excellent musicien, qui touchait bien de l'orgue et qui se proposait de faire un ouvrage sur cet instrument. A la page 391, on lit le premier couplet d'une chanson composée par Louis XIV et mise en musique par le sieur de la Barne, épinette et organiste du roi.

Beaugrand et Roberval excellaient dans la théorie et la pratique de la musique.

Le bon Père s'abandonne aussi quelquefois à des considérations qui paraissent, au point de vue de notre siècle, d'une étrangeté extrême. Voici un spécimen relatif aux sons harmonieux.

« Corollaire. *Si le son de chaque chorde est d'au-*
» *tant plus harmonieux et agréable qu'elle fait entendre*
» *un plus grand nombre de sons différents en mesme*
» *temps, et qu'il soit permis de comparer les actions*
» *morales aux naturelles, et de transporter la physique*
» *aux actions humaines, on peut dire que chaque action*
» *est d'autant plus harmonieuse et agréable à Dieu,*
» *qu'elle est accompagnée d'un plus grand nombre de*
» *motifs, pourvu qu'ils soient tous bons : par exemple,*
» *lorsque l'on jeûne pour macérer le corps et pour le*
» *rendre plus obeyssant à l'esprit, et puis pour satisfaire*
» *au commandement de l'Église ; en troisiesme lieu pour*
» *réserver quelque chose pour les pauvres, et finalement*
» *pour imiter les jeûnes de Nostre Sauveur et pour pra-*
» *tiquer l'amour que nous lui portons. Car l'on peut*
» *comparer tous ces motifs à tous les sons qui accom-*

» *pagnent le mouvement de la chorde, et dire quant et*
» *quant que l'intention qui est la plus forte, et qui a la*
» *fin la principale et la plus excellente, est semblable*
» *au son dominant et naturel de la chorde, puisqu'il*
» *est le plus sensible et la cause de tous les autres sons*
» *qui se font par des mouvements plus précipités, ou*
» *par des retours plus fréquents.* »

Et une foule d'imaginations du même genre (*). En décrivant toutes les danses usitées de son temps (on y voit des valses que l'on trouverait indécentes aujourd'hui), il propose de composer des ballets pour enseigner l'astronomie. A propos d'un éloge pompeux de l'*unisson*, il prêche la communauté des biens et dit : « Et quant à la communauté des républiques, à laquelle Aristote s'est opposé pour contredire à son maistre, elle est très-souhaitable ; *car toutes les choses les plus excellentes nous convient à cette égalité et communion des biens;* tous les hommes sont frères (liv. I, p. 11). » Le bon moine de Saint-François-de-Paule, voyant le monde à travers les grilles du cloître de la place Royale, croit qu'il peut se gouverner comme un couvent.

Mersenne, né au bourg d'Oizé (Sarthe) en 1588, est mort à Paris en 1645, par suite d'une opération chirurgicale mal faite. Ayant consacré sa vie entière à l'avancement des sciences, à l'utilité publique, il ordonna même l'autopsie de son corps, pour découvrir où les gens de l'art s'étaient trompés. Il avait des liaisons avec les hommes distingués dans les sciences, dans les arts libéraux et même dans les métiers. Encourageant tous, ne jalousant personne, il devenait un lien, sorte de territoire neutre, entre des correspondants qui quelquefois ne s'aimaient guère; ce qui n'est pas rare entre savants, même et surtout de haut bord.

(*) Très-souvent les hommes les plus instruits ont une facette cervicale portant l'estampille de Bedlam.

BIBLIOGRAPHIE.

Tous les ouvrages annoncés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* se trouvent chez MALLET-BACHELIER, libraire, quai des Augustins, 55.

DIE EBENE POLYGONOMETRIE, VOLLSTÄNDIG DARGESTELT UND DURCH ZAHLREICHE BEISPIELE ERLAÜTERT. La Polygonométrie plane, complétement exposée et éclaircie par de nombreux exemples; par le Dr *J. Dienger*, professeur à l'école polytechnique de Carlsruhe. Stuttgard, 1854; in-8 de 80 pages, 52 figures sur bois dans le texte.

Simon-Antoine-Jean Lhuilier (*) a publié l'ouvrage suivant : *Polygonométrie, ou de la mesure des figures rectilignes, et abrégé d'Isopérimétrie élémentaire*. Genève, 1774; in-4.

On y découvre les qualités de l'auteur, des développements instructifs, des raisonnements rigoureux; mais aussi ses défauts, des longueurs rebutantes et l'absence d'élégance et de symétrie : ces défauts expliquent pourquoi tant d'excellents ouvrages trouvent si peu de lecteurs. La *Dynamique* de d'Alembert est un chef-d'œuvre de génie; Jacobi faisait le plus grand cas de la *Théorie des Équations* de Bezout; qui lit ces deux ouvrages? On peut promettre à M. Dienger beaucoup de lecteurs, même en France, quand il sera traduit. Exposition claire, notations bien choisies, formules mnémoniques en petit nombre, applications numériques nombreuses : telles sont les qualités qui distinguent cet opuscule. Il est divisé en six sections.

(*) Né à Genève le 24 avril 1756, mort à Genève le 28 mars 1846, age de quatre-vingt-dix ans. M. Sturm est son élève, ainsi que le prince Czartoriski, chef de l'émigration polonaise.

Première section (1-14). Détermination d'un point dans un plan; coordonnées; les axes formant quatre angles : $+x$, $+y$, premier angle; $+y$, $-x$, second angle; $-x$, $-y$, troisième angle; $-y$, $+x$, quatrième angle; conservant les directions des axes et changeant l'origine, on fait voir, qu'ayant égard aux signes, les mêmes formules servent à exprimer ce changement, qui est un mouvement de translation. Les coordonnées polaires supposent un mouvement de rotation; pour fixer le sens et la grandeur de cette rotation, on admet deux conventions, mais qui sont essentielles et qu'il ne faut jamis perdre de vue : 1° la rotation unique est celle qui amène l'axe $+x$ sur l'axe $+y$; 2° l'angle de rotation se compte de 0 à 360 degrés. Ceci établi, les équations $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, où ρ est essentiellement positif, servent à passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires, pour toutes les positions possibles.

MN étant la direction d'une droite, pour avoir son inclinaison sur l'axe des $+x$, on mène par M une parallèle MR à l'axe $+x$; la rotation que doit faire MR, pour s'appliquer sur MN, est l'inclinaison cherchée; bien entendu, rotation conforme à la convention de ci-dessus, ce qu'on ne répétera plus. r étant la longueur de MN; x_1, y_1 les coordonnés de M; x_2, y_2 les coordonnées de N; on a constamment

$$x_2-x_1=r\cos\varphi,\quad y_2-y_1=r\sin\varphi;$$

φ est l'inclinaison de r sur $+x$.

Seconde section (14-21). Détermination des coordonnées des sommets d'une ligne brisée lorsqu'on connaît les longueurs des côtés, les sommets et les angles. Pour fixer les idées, soient les neuf points 1, 2, 3,..., 8, 9; en les joignant par des droites, on obtient la ligne brisée 1 2 3...8 9, formée par les côtés 1 2, 2 3, 3 4,..., 8 9;

1 2 est le premier côté qui précède le deuxième 2 3, lequel précède le troisième côté 3 4, et ainsi de suite.

Désignons par

a_1	la longueur du côté	1 2,
a_2	—	2 3,
a_3	—	3 4,
$\vdots$		$\vdots$
a_8	—	8 9;

par

φ_1	l'inclinaison de	a_1	sur l'axe	$+x$,
φ_2	—	a_2	—	
φ_3	—	a_3	—	
$\vdots$		$\vdots$		
φ_8	—	a_8	—	

L'angle que forme un côté avec celui qui le suit immédiatement est mesuré par la rotation que doit faire le premier pour s'appliquer sur le second (*).

Désignons par

A_2	l'angle que fait le côté	a_1	avec	a_2,
A_3	—	a_2	—	a_3,
A_4	—	a_3	—	a_4,
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
A_8	—	a_7	—	a_8;

on aura généralement pour n points :

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + A_n - 180^\circ + m_n\, 360^\circ,$$

où m_n est 0, ou $+1$, ou -1,

$$\sin \varphi_n = \sin[\varphi_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n (n-1)\, 180^\circ],$$
$$\cos \varphi_n = \cos[\varphi_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n (n-1)\, 180^\circ].$$

(*) A cet effet on fait passer par le sommet commun une parallèle à $+x$ et une parallèle à $+y$, et l'on opère une rotation qui tend à amener $+x$ sur $+y$.

Soient

$$\begin{array}{lcr}
x_1,\ y_1 \text{ les coordonnées de} & & 1, \\
x_2,\ y_2 & — & 2, \\
x_3,\ y_3 & — & 3, \\
\vdots & & \vdots \\
x_n,\ y_n & — & n;
\end{array}$$

on a

$$x_n = x_1 + a_1 \cos v_1 + a_2 \cos v_2 + \ldots + a_{n-1} \cos v_{n-1},$$
$$y_n = y_1 + a_1 \sin v_1 + a_2 \sin v_2 + \ldots + a_{n-1} \sin v_{n-1},$$

ou

$$\begin{aligned}
x_n = x_1 &+ a_1 \cos v_1 - a_2 \cos(v_1 + A_2) + a_3 \cos(v_1 + A_2 + A_3) \\
&- a_4 \cos(v_1 + A_2 + A_3 + A_4) + \ldots \\
&\pm a_{n-1} \cos(v_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1}), \\
y_n = y_1 &+ a_1 \sin v_1 - a_2 \sin(v_1 + A_2) + a_3 \sin(v_1 + A_2 + A_3) \\
&- a_4 \sin(v_1 + A_2 + A_3 + A_4) + \ldots \\
&\pm a_{n-1} \sin(v_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_{n-1});
\end{aligned}$$

formules qui donnent les coordonnées en fonction des côtés et des angles de la ligne brisée.

Application numérique.

$$x_1 = 0,\ y_1 = 0;\ v_1 = 20^\circ 36';\ a_1 = 173{,}72;\ a_2 = 449{,}3473;$$
$$a_3 = 315{,}6626;\ a_4 = 207{,}9673;$$
$$a_5 = 242{,}968;\ a_6 = 175{,}1367;$$
$$A_2 = 214^\circ 17' 54'';\ A_3 = 101^\circ 35' 8'';\ A_4 = 179^\circ 42' 34'';$$
$$A_5 = 93^\circ 17' 45'';\ A_6 = 107^\circ 18' 10'';$$

on obtient

$$\begin{array}{ll}
x_1 = 0, & y_1 = 0, \\
x_2 = 162{,}6122, & y_2 = 61{,}1219, \\
x_3 = 420{,}9999, & y_3 = 428{,}7477, \\
x_4 = 710{,}4460, & y_4 = 302{,}7962, \\
x_5 = 300{,}7179, & y_5 = 218{,}8499, \\
x_6 = 815{,}5857, & y_6 = -8{,}7153, \\
x_7 = 640{,}7235, & y_7 = +1{,}0856.
\end{array}$$

Troisième section (21-45). Équations polygonométriques fondamentales; solutions des problèmes polygonométriques.

Lorsque la ligne brisée se ferme, elle devient un polygone. Ainsi, ayant les n points $1, 2, 3, \ldots, n_1$, les côtés du polygone sont $n\,1, 12, 23, \ldots, n-1, n$; prenons le côté $1n$ pour axe des $+x$; et désignons par A_1 l'inclinaison de 12 sur $1n$; nous aurons

$$x_1 = y_1 = 0; \quad x_n = a_n; \quad y_n = 0; \quad v_1 = A_1;$$

les deux dernières formules de la section précédente donnent

$$\begin{aligned}
0 = {} & a_1 \cos A_1 + (-1)^1 a_2 \cos(A_1 + A_2) \\
& + (-1)^2 a_3 \cos(A_1 + A_2 + A_3) + \ldots \\
& + (-1)^{n-2} a_{n-1} \cos(A_1 + A_2 + \ldots + A_{n-1}) \\
& + (-1)^{n-1} a_n \cos(A_1 + A_2 + \ldots + A_n); \\
0 = {} & a_1 \sin A_1 + (-1)^1 a_2 \sin(A_1 + A_2) + \ldots \\
& + (-1)^2 a_3 \sin(A_1 + A_2 + A_3) + \ldots \\
& + (-1)^{n-2} a_{n-1} \sin(A_1 + \ldots + A_{n-1}) \\
& + (-1)^{n-1} a_n \sin(A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n);
\end{aligned}$$

ce sont les deux équations polygonométriques fondamentales. On en déduit

$$\cos(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = (-1)^n; \quad \sin(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 0,$$
$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n = (n-2)\,180^\circ + r.360,$$

où r est un nombre entier positif ou négatif. Lorsque le polygone est convexe, $r = 0$ (voir *Nouvelles Annales*, tome IX, page 183, Barbet), et, dans ce cas, on peut toujours choisir l'axe des $+y$ de manière que les A deviennent les angles intérieurs du polygone.

Problème I. *Dans un polygone, on connaît tous les éléments hormis un angle et deux côtés qu'il faut calculer.*

Solution. Soit un hexagone convexe

$$A_1 = 83^\circ 44'; \; A_2 = 23^\circ 52'; \; A_3 = 290^\circ 46'; \\ A_4 = 30^\circ 24'; \; A_5 = 244^\circ 30', \\ a_1 = 1040; \; a_2 = 624; \; a_4 = 533; \; a_5 = 481;$$

il s'agit de calculer A_6 et a_3, a_6. Appliquant les formules, on obtient

$$A_6 = 46^\circ 44; \; a_3 = 515,4753; \; a_6 = 954,3163.$$

PROBLÈME II. *On donne tous les côtés moins un; et tous les angles, hormis deux angles adjacents au côté cherché.*

Solution. Soit un pentagone convexe

$$a_1 = 540; \; a_2 = 519; \; a_3 = 438; \; a_4 = 536; \\ A_2 = 46^\circ 38'; \; A_3 = 223^\circ 55'; \; A_4 = 38^\circ 51'.$$

On obtient d'abord

$$A_1 = 110^\circ 48' 13'';$$

puis

$$A_5 = 119^\circ 47' 47'';$$

et enfin,

$$a_5 = 429,0677.$$

PROBLÈME III. *On connaît tous les côtés et tous les angles moins deux.*

Solution. Quadrilatère convexe :

$$a_1 = 452; \; a_2 = 610; \; a_3 = 411; \; a_4 = 483,212; \\ A_1 = 79^\circ 47' 26''; \; A_3 = 68^\circ 53'.$$

On obtient

$$A_2 = 92^\circ 5',$$

et ensuite,

$$A_4 = 119^\circ 14' 34''.$$

PROBLÈME IV. *On connaît les côtés moins un et les angles moins deux adjacents à un côté donné.*

Solution. Pentagone convexe

$$a_1 = 540;\ a_2 = 519;\ a_4 = 536;\ a_5 = 429{,}068;$$
$$A_1 = 46^\circ\, 38';\ A_3 = 223^\circ\, 55';\ A_4 = 38^\circ\, 51'.$$

D'abord on obtient

$$a_3 = 437{,}9997;$$

puis

$$A_1 = 110^\circ\, 48'\, 13'';\ A_5 = 119^\circ\, 47'\, 47''.$$

Problème V. *On donne tous les côtés moins un et tous les angles moins deux; un seulement des angles inconnus est adjacent au côté cherché.*

Problème VI. *On connaît tous les côtés moins un; tous les angles moins deux; les angles cherchés ne se succèdent pas immédiatement et aucun d'eux n'est adjacent au côté cherché.*

Problème VII. *On donne tous les côtés, et tous les angles moins trois angles qui se succèdent immédiatement.*

Problème VIII. *Mêmes données; deux seulement des trois angles cherchés se succèdent immédiatement.*

Problème IX. *Mêmes données; les angles cherchés sont entièrement séparés.*

Quatrième section (46-59). Calcul de l'aire d'un polygone dont on connaît les côtés et les angles.

Le double de l'aire d'un polygone quelconque de n sommets est

$$y_1 x_2 + y_2 x_3 + y_3 x_4 \ldots y_{n-1} x_n + y_n x_1$$
$$- (x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_2 y_4 + \ldots + x_{n-1} y_n + x_n y_n) (*).$$

Les x, y sont les coordonnées rectangulaires des sommets. Remplaçant les coordonnées par leurs valeurs en fonction

---

(*) Cette formule se simplifie quand on l'écrit ainsi :

$$y_1 (x_2 - x_n) + y_2 (x_3 - x_1) + \ldots + y_n (x_1 - x_{n-1}).$$

Il y a moitié moins de multiplications et elles sont faciles.

des côtés et des angles, on obtient l'aire en fonction des mêmes éléments.

Cinquième section (60-67). Quelques problèmes polygonométriques particuliers, et applications pratiques.

PROBLÈME X. *Un polygone est complétement donné; mener par un des sommets une droite qui en retranche une aire donnée.*

Solution. Heptagone. 1234567;
on a

$$A_2 = 107^\circ 38' 30''; \quad A_3 = 116^\circ 10' 22'';$$
$$A_4 = 245^\circ 30'; \quad A_5 = 103^\circ 10' 40'';$$
$$A_6 = 139^\circ 40' 19''; \quad A_7 = 89^\circ 2' 37'';$$
$$a_1 = 857; \quad a_2 = 1098; \quad a_3 = 780$$
$$a_4 = 925; \quad a_5 = 943; \quad a_6 = 927; \quad a_7 = 835.$$

Il s'agit de mener par le sommet 1 une droite qui retranche l'aire 1612800.

On calcule successivement les aires doubles des figures 123, 1234, 12345, 123456. On trouve pour

12345	double aire	2190074,
1234561	—	4618740,3.

Le double de l'aire à retrancher est 3225600, nombre compris entre les deux dernières; la transversale cherchée doit donc couper le côté a_5. Soit m le point d'intersection dans le polygone $12345\,m$; on connaît l'aire et les côtés moins $1m$ et $5m$; alors par les formules connues, on obtient

$$5m = 402,072.$$

Sixième section (67-79). Changement de coordonnées: calcul des nouvelles coordonnées.

Coordonnées rectangulaires en coordonnées rectangulaires.

Coordonnées d'un point M :

$$x = -283,972;\quad y = +1827,964.$$

Coordonnées de la nouvelle origine :

$$a = 37,825;\quad b = -12,830.$$

Le système a tourné d'un angle $\varphi = 15^\circ\ 2'\ 11'',5$.
Nouvelles coordonnées :

$$x' = +166,788;\quad y' = +1861,251.$$

Exercices tirés du même ouvrage.

$$411 \sin 148^\circ\ 40'\ 26'' = 213,682;$$
$$168253,95 \cos 986^\circ\ 2'\ 32'' = -7471,833;$$
$$697 \sin 1058^\circ\ 2'\ 38'',8 = -260,603;$$
$$845 \operatorname{tang} 1153^\circ\ 34'\ 6'',8 = 2865257;$$
$$3944,81 \cot 196^\circ\ 3'\ 6'' = 13710,51;$$
$$519,536 \cos 262^\circ\ 46' = -35026,26;$$
$$\frac{195,05 . \sin 177^\circ\ 2'\ 40''}{\sin 146^\circ\ 38'\ 50''} = 18,2924.$$

Quadrilatère non convexe :

$$a_1 = 897,139;\quad a_2 = 610;\quad a_3 = 620;$$

$A_2 = 120^\circ\ 36'\ 19''$ (intérieur); $A_3 = 252^\circ\ 57'\ 48''$ (extérieur);
on obtient

$A_1 = 11^\circ\ 50'\ 28''$ (intérieur); $A_4 = 334^\circ\ 35'\ 25''$ (extérieur).

Octogone complet; convexe.

$A_1 = 144^\circ\ 29'$; $A_2 = 122^\circ\ 25'$; $A_3 = 141^\circ\ 33'$; $A_4 = 152^\circ\ 4'$;
$A_5 = 63^\circ\ 19$; $A_6 = 238^\circ\ 12'$; $A_7 = 87^\circ\ 54'$; $A_8 = 132^\circ\ 4'$;
$a_1 = 1400$; $a_2 = 1768$; $a_3 = 1329$; $a_4 = 1726$;
$a_5 = 1204$; $a_6 = 1375$; $a_7 = 2876,37$; $a_8 = 481,61$;

aire $= 8928166,2$.

Endécagone complet, convexe.

$A_1 = 102^\circ 22' 56'',8$; $A_2 = 107^\circ 38' 30''$; $A_3 = 116^\circ 10' 22''$;
$A_4 = 245^\circ 30'$; $A_5 = 103^\circ 10' 40''$; $A_6 = 119^\circ 10' 10''$;
$A_7 = 84^\circ$; $A_8 = 275^\circ 31' 28''$; $A_9 = 120^\circ$; $A_{10} = 107^\circ 2' 2''$;
$A_{11} = 239^\circ 23' 41'',2$;

$a_1 = 857$; $a_2 = 1098$; $a_3 = 780$; $a_4 = 925$; $a_5 = 943$;
$a_6 = 624$; $a_7 = 697$; $a_8 = 845$; $a_9 = 620$; $a_{10} = 610$;
$a_{11} = 897,14$;
aire $= 3486697,36$.

Polygone de vingt et un côtés.

$A_1 = 125^\circ 39' 33''$; $A_2 = 194^\circ 35' 10''$; $A_3 = 103^\circ 1' 30''$;
$A_4 = 124^\circ 22' 36''$; $A_5 = 185^\circ 17' 58''$; $A_6 = 231^\circ 40' 35''$;
$A_7 = 144^\circ 18' 17''$; $A_8 = 244^\circ 51' 37''$; $A_9 = 156^\circ 0' 40''$;
$A_{10} = 144^\circ 59' 20''$; $A_{11} = 46^\circ 12' 10''$; $A_{12} = 242^\circ 52' 45''$;
$A_{13} = 144^\circ 46'$; $A_{14} = 110^\circ 10' 57''$; $A_{15} = 275^\circ 16' 38''$;
$A_{16} = 201^\circ 6' 15''$; $A_{17} = 117^\circ 6' 31''$; $A_{18} = 89^\circ 44' 49''$;
$A_{19} = 197^\circ 4' 2''$; $A_{20} = 204^\circ 12' 58''$; $A_{21} = 136^\circ 39' 59''$;

$a_1 = 4375$; $a_2 = 4005,9$; $a_3 = 5590,2$;
$a_4 = 3991,2$; $a_5 = 1754,5$; $a_6 = 2183,1$;
$a_7 = 475,8$; $a_8 = 2709,3$; $a_9 = 5558$;
$a_{10} = 4133,4$; $a_{11} = 2574,8$; $a_{12} = 2737,6$;
$a_{13} = 3519,8$; $a_{14} = 5224,1$; $a_{15} = 2357,2$;
$a_{16} = 6904,6$; $a_{17} = 5441,6$; $a_{18} = 4790,5$;
$a_{19} = 3579,9$; $a_{20} = 3460,6$; $a_{21} = 5339,03$;
aire $= 223281195$.

Les calculs du premier polygone et du troisième sont de M. Schiereck, et le calcul du deuxième polygone, de M. Pross.

Éléments d'Algèbre a l'usage des candidats aux Écoles du Gouvernement; par *S.-F. Lacroix,* Membre de l'Institut. 21e édition, revue, corrigée et annotée, conformément aux nouveaux *Programmes de l'enseignement dans les Lycées;* par *M. Prouhet,* professeur de Mathématiques. Paris, 1854; in-8 de 520 pages (*).

Avertissement pour la 21e *édition.*

« Les ouvrages de M. Lacroix jouissent depuis long-
» temps, en France et à l'étranger, d'une réputation
» justement méritée. Leur ensemble forme un Cours com-
» plet de Mathématiques, rédigé avec beaucoup d'ordre,
» de clarté et de rigueur. Peu de livres élémentaires ont
» été conçus avec plus de maturité, exécutés avec plus de
» soin, revus et améliorés avec plus de persévérance :
» c'est ce qui en explique le succès.

» Dans cette nouvelle édition des *Éléments d'Algèbre*,
» le texte de l'auteur a été scrupuleusement respecté. Les
» *Notes* que l'on a cru devoir y joindre, et dont les plus
» étendues ont été rejetées à la fin du volume, sont consa-
» crées au développement de quelques questions récem-
» ment exigées des candidats à l'École Polytechnique.
» Pour l'ordre et la division des matières traitées dans
» ce Supplément, on s'est entièrement conformé aux
» *Programmes officiels,* dont on a reproduit les énoncés
» en tête de chaque Note et des principaux paragraphes. »

On peut, ce me semble, ajouter que les quatorze *Notes* qui terminent le volume ne le cèdent au texte ni en clarté ni en rigueur, et que M. Prouhet a complétement atteint le but qu'il se proposait. Il eût été à désirer que plusieurs auteurs qui ont publié de nouveaux Traités conformes aux *Programmes officiels* se fussent contentés d'annoter avec autant de soin d'anciens Traités d'un mérite reconnu. Ce premier travail de M. Prouhet en demande un autre : l'an-

(*) Prix : 6 francs, chez *Mallet-Bachelier,* libraire.

notation du *Complément d'Algèbre,* où l'on trouvera certaines théories indispensables dont les *Programmes* n'ont pas même conservé la trace. Ces deux petits volumes (l'*Algèbre* et son *Complément* annotés) serviraient d'introduction à l'*Algèbre supérieure* de M. Serret, qui n'est en réalité qu'un fragment très-important d'un Traité complet d'Algèbre.

V.-A. LEBESGUE,
Correspondant de l'Institut.

ANNÉE SCOLAIRE 1854-55. AGENDA-MEMENTO DES ÉCOLES ET DES NOUVELLES ÉTUDES. — GUIDE QUOTIDIEN DES ÉLÈVES POUR L'ÉTUDE DES CONNAISSANCES EXIGÉES A TOUS LES EXAMENS ET LA CONSERVATION DE CES CONNAISSANCES; par *Auguste Blum*, ingénieur et professeur, ancien élève de l'École Polytechnique. Paris, 1854; in-12 de 206 pages (*).

Julien (de Paris) a publié il y a quelques années un *Biomètre* destiné à inscrire, à la fin de chaque journée, ce qu'on a fait, ce qu'on a vu et appris dans la journée. C'est la tenue commerciale des livres appliquée à la vie. M. Blum propose la même idée aux élèves. Chaque page est divisée en trois compartiments, consacrés à trois jours de la semaine et du mois. La partie blanche de ces pages est très-commode pour y écrire tout ce qu'on veut. Chaque mois est suivi de recommandations inspirées par d'excellentes intentions; conseils qui seront suivis, comme toujours, par ceux qui peuvent s'en passer. En février, on recommande les interrogations sur la *Chimie* comme le meilleur procédé pour corriger *les défauts de prononciation*. La connexion entre février, la prononciation et la Chimie semble difficile à établir. N'importe, cet almanach de poche est préférable à beaucoup d'autres.

(*) Prix : broché, 1 franc. — Cartonné avec fermoir en cuivre, $1^{f},50^{c}$, chez *Mallet-Bachelier*, libraire.

OBSERVATIONS

Sur le rapprochement théorique et pratique des formes réelles et imaginaires dans certaines recherches par approximation.

Au Rédacteur.

Monsieur,

Dans une Note que vous avez insérée, page 40 du numéro de janvier 1854 de votre Recueil, vous faites remarquer avec juste raison que, lorsque dans une équation les valeurs des coefficients ne sont qu'approchées, il pourra arriver que les racines de cette équation, de réelles qu'elles étaient pour un certain degré d'approximation, pourront devenir imaginaires pour un autre degré très-rapproché d'ailleurs du précédent, et vous ajoutez que ce point d'analyse, vu son importance pratique, mérite d'être éclairci.

Cet appel que vous faites aux géomètres ne tend à rien moins qu'à provoquer une explication rationnelle de la forme imaginaire; et il est certain que si nous étions aussi bien fixés sur la signification qu'il faut, dans la pratique, attribuer à cette forme, que nous le sommes aujourd'hui sur celle des formes positive et négative, la question que vous avez posée serait à peu près résolue.

Cette question, Monsieur, après les explications que j'ai données sur les expressions imaginaires, dans mon ouvrage intitulé : *Études philosophiques sur la science du calcul* (*), ne présente, à mon point de vue, aucune difficulté. Mais, comme cet ouvrage a été peu répandu,

(*) 1re partie, 1841, in-8 de 283 pages.

et que, très-probablement, un fort petit nombre de vos lecteurs en a pu prendre connaissance, je ne peux entreprendre de présenter ici des vues générales susceptibles de donner des explications complètes sur le point d'analyse que vous désirez voir éclairci. Mais, à défaut de tout point d'appui sur les principes constitutifs de cette partie de la science, principes longuement développés dans l'ouvrage que je viens de rappeler, et en ayant seulement recours aux errements ordinaires, il est possible, ce me semble, de présenter quelques développements susceptibles de faire disparaître, sinon en totalité, du moins en partie, ce que peut présenter d'obscur, dans ses applications pratiques, le fait analytique que vous avez signalé.

Dans les idées généralement admises, il y a pour ainsi dire un abîme entre l'imaginaire et le réel, puisque nous refusons de comprendre l'un, tandis que nous comprenons et expliquons parfaitement l'autre, non-seulement dans son ensemble, mais encore dans la multiplicité de tous ses détails. Il est certain qu'en envisageant les choses à ce point de vue, c'est un fait très-surprenant que celui qui, comme vous le dites, au moyen de la plus légère altération dans les coefficients réels d'une équation, peut faire passer les racines de cette équation de la réalité à l'imaginarité, et *vice versâ*.

Mais, au fond, si cet abîme supposé entre les deux formes n'existait pas, si elles se rapprochaient, dans certains cas, de manière à pouvoir être prises l'une pour l'autre, suivant le degré d'approximation qu'on veut introduire dans les calculs, s'il en était ainsi, dis-je, tout ce que le fait signalé a pu présenter d'extraordinaire au premier abord disparaîtrait à peu près complétement, et le passage du réel à l'imaginaire ne serait plus, dans ce cas, qu'une affaire d'approximation, tout comme en était une le remplacement du premier coefficient par un autre très-voisin de lui ; il y aurait ainsi concordance parfaite entre la modification qu'on fait subir à l'énoncé et celle que l'algèbre introduit dans sa réponse.

Or l'étude algébrique approfondie des formes imaginaires fait voir que c'est bien ainsi que les choses se passent; mais, je le répète, je ne peux reproduire ici cet aspect général de la question. A défaut de ce moyen théorique, je vais essayer de faire comprendre ma pensée par un exemple fort simple, et montrer qu'il nous arrive très-souvent d'accepter dans la pratique comme très-réelles des solutions que la théorie devrait nous forcer à considérer comme imaginaires. Tout dépendra, comme on va le voir, et comme je l'ai annoncé ci-dessus, du degré d'approximation qu'on s'est imposé.

Soit O le centre d'une circonférence dont le rayon R est connu à un centième près seulement, en plus ou en moins; soit A un point extérieur à cette circonférence, et supposons qu'on demande de lui mener une tangente par le point A.

Ayant décrit, avec la valeur numérique connue du rayon et du point O comme centre, la circonférence donnée, puis, sur AO comme diamètre, en ayant décrit une seconde qui rencontre la première au point T (*), on joindra T avec A, et l'on aura ainsi la tangente demandée. Il est évident qu'eu égard à l'approximation avec laquelle le rayon du cercle donné a été déterminé, la droite AT résoud le problème, et personne, assurément, ne refusera de l'accepter comme remplissant bien cette fonction.

Mais il est évident aussi qu'eu égard à la véritable valeur du rayon, l'expression algébrique de cette tangente, indépendamment du cas où elle se trouverait être la tangente réelle, peut présenter deux autres cas distincts. En

(*) Il y a deux points d'intersection. L'imaginarité entraîne toujours un nombre pair d'intersections.

effet, puisque tout ce qu'on sait de la valeur numérique du rayon, c'est qu'elle n'est exacte qu'à un centième près, soit en plus, soit en moins, il se pourrait que la valeur véritable fût plus grande ou plus petite qu'elle d'une quantité dont la limite serait comprise entre $+\frac{1}{100}$ et zéro d'une part, et entre o et $-\frac{1}{100}$ de l'autre. Or, dans le premier cas, ce qu'on aura pris pour la tangente sera, en réalité, une sécante coupant la circonférence en deux points dont les positions sur cette circonférence seront facilement assignables, tandis que, dans le second, ce sera une droite complétement extérieure au cercle pour laquelle l'expression analytique des deux points de rencontre sera devenue imaginaire; et cependant cette ligne, quoique jouissant de propriétés analytiques imaginaires, n'en continuera pas moins, dans la pratique, à être acceptée comme résolvant réellement la question, dans la limite d'approximation qu'on s'est donnée.

Nous trouvons donc, dans ces considérations concrètes de la géométrie, une image frappante de valeurs réelles et de valeurs imaginaires placées bien près l'une de l'autre, liées entre elles par une continuité non interrompue, concourant vers une limite qui serait le point T, dans le cas où la valeur donnée du rayon serait la véritable, dont toutes les différences, en convergeant vers cette limite, s'atténuent de plus en plus à mesure que les écarts de l'approximation se resserrent, et qui, par conséquent, dans toute la série des valeurs par lesquelles passe cette approximation, peuvent être indistinctement prises l'une pour l'autre.

Si donc, lorsqu'on reste dans le domaine purement analytique, la concordance qui existe entre la variation qu'on fait subir à des quantités réelles d'une part, et le passage réel à l'imaginaire qu'éprouvent d'autre part, à la suite de ces mêmes variations, certaines expressions fonctions des premières, est de nature à se présenter à l'esprit avec quelque confusion, on a pu se convaincre, par l'exemple que nous venons de citer, que les considérations concrètes sont susceptibles de jeter quelques clartés sur ce point délicat de la métaphysique du calcul. Car, bien que la ligne AT, lorsque la valeur du rayon est plus petite que la valeur donnée, revête, pour quelques-unes de ses propriétés, la forme imaginaire, elle ne disparaît pas entièrement pour cela, elle continue à subsister, à représenter approximativement la tangente, à exercer une fonction que l'algèbre pure, en revêtant la forme imaginaire, semblerait lui refuser.

Pour compléter ces explications, il faudrait maintenant dire ce que sont les points de rencontre imaginaires de la sécante extérieure, montrer qu'ils ne sont imaginaires que de nom, fixer le lieu géométrique qu'ils doivent occuper, indiquer à quelle modification de l'énoncé primitif correspond la manifestation inattendue de la racine carrée de l'unité négative; mais, pour cela, ce seraient tous les principes constitutifs de la théorie que j'ai exposée dans mon ouvrage qu'il faudrait reproduire ici.

Ce qui, jusqu'à ce jour, a laissé dans l'ignorance en ce qui concerne l'interprétation des expressions imaginaires, c'est qu'aussitôt que cette forme, après avoir apparu dans le calcul, doit passer dans le domaine des applications, nous nous arrêtons comme devant une barrière infranchissable, nous disons que nous ne comprenons plus, et nous ne faisons aucun effort pour soulever le plus petit coin du voile qui nous dérobe l'intelligence de l'énigme figurée par $\sqrt{-1}$.

C'est ainsi qu'avaient agi les anciens géomètres à l'égard des résultats négatifs, et, parce qu'ils ne les avaient pas d'abord compris, ils leur avaient donné le nom de fausses solutions. Nous savons cependant aujourd'hui que ces solutions ne sont pas plus fausses que celles qui se présentent avec le signe additif; nous les interprétons fort bien, soit en elles-mêmes, soit relativement aux modifications que leur manifestation peut rendre nécessaires dans l'énoncé primitif de la question.

Or, si aujourd'hui nous sommes encore dans l'impossibilité de savoir ce qu'est l'imaginaire en lui-même, nous pourrions du moins, dans beaucoup de cas, malgré cette impossibilité d'interpréter une racine de cette forme, nous rendre compte des indications que sa manifestation algébrique peut donner pour nous conduire à une transformation de l'énoncé telle, que l'obstacle imaginaire cessât d'en être un.

Faisons mieux comprendre notre pensée par un exemple.

Si l'on a l'équation

$$x + y = a,$$

on en déduit

$$y = a - x;$$

par conséquent, lorsqu'on prendra pour x une valeur supérieure à la quantité a, comme, par exemple, $a + p$, il viendra

$$y = -p.$$

Or, que je sache ou que je ne sache pas ce que peut être en elle-même une valeur négative, je n'en verrai pas moins que si, pour tous les cas où x dépasse a, je substitue à l'énoncé primitif $x + y = a$ de la question le suivant $x - y = a$, j'obtiendrai, pour tous ces cas, du positif, c'est-à-dire un résultat toujours réalisable. Sans doute je n'aurai pas ainsi tout appris; je pourrai rester encore dans l'ignorance sur la signification d'un nombre négatif: mais je serai du moins fixé sur l'espèce de réaction que la présence de ce nombre doit exercer sur la question proposée; je connaîtrai un de ses effets, et n'est-ce pas toujours par la connaissance préalable des effets que nous pouvons espérer d'arriver à la découverte de celle des causes?

Prenons maintenant un cas un peu plus compliqué: supposons qu'au lieu de chercher deux quantités dont la somme soit a, on veuille en déterminer deux dont la somme des carrés soit a^2. L'expression analytique du problème sera

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

et l'on en déduira

$$y = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Tant que x sera moindre que a, il ne se présentera aucune difficulté; mais si x est égal à $a + p$, on aura

$$y = \sqrt{-2pa - p^2} = \sqrt{p(2a+p)}\sqrt{-1},$$

et, parce que ce résultat est imaginaire, on arrête le calcul, on abandonne la question, on ne va pas plus loin, du moins dans la pratique.

Cependant, comme nous allons le montrer, il reste encore quelque chose à faire.

En effet, de ce que la valeur de y est égale au produit d'une quantité par $\sqrt{-1}$, il s'ensuit que celle de y^2 se présente sous la forme négative. Cela prouve évidemment que, dans le cas actuel, le carré arithmétique représenté par y^2, au lieu d'être ajouté à celui de x, devra lui être retranché. En modifiant ainsi l'énoncé du problème, les conditions auxquelles il faut satisfaire continuent d'être possibles. Voyons maintenant quelle conséquence il doit résulter de cette modification pour la racine cherchée et pour l'usage qu'on en doit faire.

Or il est évident que cette racine, une fois trouvée arithmétiquement, doit, par voie de multiplication, conduire au carré arithmétique qui, d'après l'énoncé primitif de la question, devrait, étant ajouté à celui de x, reproduire a^2. Reste donc à savoir s'il n'y a pas quelque facteur en algèbre qui, accompagnant cette racine dans la multiplication qu'on doit en faire par elle-même et fonctionnant dans cette multiplication comme la racine y fonctionne elle-même, n'arrangera pas naturellement le produit de telle manière qu'on voie clairement que ce produit, au lieu d'être ajouté, doit être retranché. La réponse à cette question est toute faite. Quelle est, en effet, l'expression algébrique qui, employée deux fois comme facteur, fait passer du positif au négatif? C'est évidemment $\sqrt{-1}$; et voilà pourquoi nous trouvons pour y la valeur $\sqrt{p(2a+p)}\ \sqrt{-1}$.

Ainsi, dans tout problème arithmétique où l'inconnue sera élevée à la deuxième puissance, lorsqu'on trouvera pour la valeur de cette inconnue une racine imaginaire de la forme $A\sqrt{-1}$, cela ne veut pas dire d'une manière absolue que le problème est impossible, mais qu'il faut en changer l'énoncé de manière à faire figurer, dans l'équation qui exprime cet énoncé, la deuxième puissance de l'inconnue avec un signe contraire à celui qui avait été d'abord employé. N'est-ce pas là un procédé exactement pareil à celui qu'on emploie journellement lorsque dans une question les solutions négatives se manifestent?

Ceci ne dit pas tout, à coup sûr, mais du moins entre l'explication complète et l'immobilité nous avons fait quelques pas.

Permettez-moi maintenant de vous présenter quelques observations purement analytiques qui pourront contribuer pour leur part à rendre plus intelligible la relation qui existe, d'une part entre les variations réelles qu'on fait subir aux coefficients d'une équation, et les passages du réel à l'imaginaire que peuvent subir d'autre part les racines de cette équation.

Sans qu'il soit nécessaire d'entrer, au sujet de quelques principes que nous allons citer, dans aucun développement, et en prenant les choses telles qu'elles sont établies aujourd'hui dans la science, nous rappellerons que lorsqu'une équation renferme des racines imaginaires, elles marchent nécessairement par couples de la forme

$$p + q\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad p - q\sqrt{-1}.$$

Or quelles sont les opérations arithmétiques, dans la combinaison qu'on peut faire entre elles de ces deux expressions, à l'aide desquelles l'imaginaire disparaît? C'est, d'une part, l'addition qui donne $2p$, et la multiplication dont le produit est $p^2 + q^2$.

Cela posé, si $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sont les racines d'une équation du $n^{ième}$ degré, son premier membre sera constitué comme il suit :

$$(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n);$$

et l'on voit que dans la série des opérations qu'il faudra faire pour obtenir le polynôme final ordonné suivant les puissances de x, il n'entrera précisément que des additions et des multiplications, d'où l'on comprend spontanément la possibilité que, dans ce premier membre, tout ce qu'il y a d'imaginaire dans les racines disparaisse. Cette première induction est d'ailleurs confirmée par le calcul, puisqu'en prenant deux facteurs binômes quelconques

$x - a_1$, $x - a_2$, que rien n'empêche de supposer appartenir à deux racines imaginaires conjuguées, leur produit sera

$$x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1 a_2,$$

dont les coefficients réalisent précisément les opérations sous l'influence desquelles les imaginaires disparaissent.

Le premier membre d'une équation est donc une fonction composée dans laquelle les lois mêmes de sa composition expliquent très-bien l'absence des imaginaires, tandis que les valeurs algébriques des racines, devant nécessairement contenir les expressions des opérations décomposantes et en particulier de l'extraction des racines, seront susceptibles de produire toutes les circonstances de cette extraction et par suite les imaginaires.

Or, dès l'instant qu'il est reconnu que la réalité des coefficients peut correspondre indistinctement à la réalité ou à l'imaginarité des racines, il n'y aura rien de surprenant à ce que la variation de ces coefficients fasse passer de l'une de ces formes à l'autre; on peut même dire qu'il n'y a pas d'autre moyen que ces variations pour réaliser ce passage dans les racines.

Ces variations peuvent d'ailleurs être conduites par voie de continuité et de rapprochement aussi petit qu'on voudra, de sorte que, les racines ne pouvant demeurer ni toujours réelles ni toujours imaginaires, on est forcément obligé d'admettre que, dans la série infinie des valeurs que peuvent prendre les coefficients, il y aura des points où la plus petite variation dans ces valeurs produira le passage du réel à l'imaginaire.

Au reste, c'est moins encore dans le domaine purement analytique que dans celui des applications concrètes que des explications à ce sujet étaient à désirer, parce que, dans le premier, l'imaginaire aussi bien que le réel est parfaitement admis, on formule également avec l'un comme avec l'autre et, malgré l'ignorance où l'on est sur la nature de l'état imaginaire, on en fait continuellement intervenir la forme dans les calculs.

Mais il n'en est pas de même dans le domaine des applications, où cet usage est absolument interdit, parce qu'on ignore complétement ce que peut être la chose elle-même. Il y avait donc quelque importance à faire voir que par le fait, dans la pratique, nous nous servons parfois de l'imaginaire pour du réel. Un grand nombre d'exemples géométriques, indépendamment de celui que nous avons traité, pourraient être cités à l'appui de cette affirmation, presque toutes les recherches de lignes et de points par approximation ne sont pas autre chose, et c'est là le point important du débat, parce qu'il en résulte une assimilation précieuse entre la science analytique et les faits naturels.

Il sera résulté de plus de cette discussion, nous l'espérons, que le réel et l'imaginaire ne sont pas si éloignés, si antipathiques l'un de l'autre qu'on a pu le croire jusqu'ici, et n'y aurait-il d'autre résultat produit par les observations qui précèdent que l'introduction de cette idée dans les esprits mathématiques, que nous pensons qu'elles ne seront pas entièrement dépourvues d'utilité pour les progrès futurs de la science.

Il importe d'ailleurs de remarquer que ce n'est pas seulement en géométrie, mais encore dans la pratique arithmétique, que nous réalisons tous les jours et, pour ainsi dire, sans nous en douter, le passage du réel à l'imaginaire. Lorsqu'en effet une quantité e est très-petite par rapport à d'autres qui concourent avec elle dans la solution d'une question, nous n'hésitons pas un instant à ne tenir aucun compte des puissances de cette quantité supérieures à la première.

Cela posé, supposons que, dans une question à résoudre, l'inconnue x dépende de deux variables z et y d'après la condition suivante $x = zy$ et que, par des calculs ultérieurs, on ait trouvé

$$zy = a^2 + e^2;$$

on n'hésitera pas dans la pratique à dire que a^2 est la valeur de x; si, d'un autre côté, on a trouvé

$$zy = a^2 - e^2,$$

on acceptera encore a^2 comme valeur de x. Cependant, dans le premier cas, les valeurs générales de z et de y sont imaginaires et peuvent être représentées par

$$z = m\left(a + e\sqrt{-1}\right), \quad y = \frac{a - e\sqrt{-1}}{m},$$

et dans le second elles sont réelles et représentées par

$$z = m(a + e), \quad y = \frac{a - e}{m}:$$

d'où l'on voit que, négliger e^2, c'est par le fait, et eu égard toujours au degré d'approximation qu'on s'est imposé, considérer comme équivalentes des expressions imaginaires et des expressions réelles.

En résumé, lorsque e est très-petit par rapport à a, on approche tout autant de la vérité en prenant $a \pm e\sqrt{-1}$ qu'en prenant $a \pm e$ et en leur substituant simplement a. C'est ce que la théorie explicative de la forme imaginaire démontre parfaitement et sans beaucoup de peine. Les remarques précédentes n'ont pas à coup sûr toute la portée d'une démonstration mathématique, mais elles sont du moins de nature à montrer que ce fait concorde très-exactement avec nos habitudes pratiques, et à ce point de vue elles me paraissent très-propres à apporter quelque clarté dans la question de doctrine qui vous a frappé et que vous avez signalée à l'attention des géomètres (*).

Permettez-moi enfin, Monsieur, de vous présenter une considération qui serre encore de plus près la question.

Supposons qu'on prenne un point A sur une droite indéfinie et qu'on dise d'un autre point qu'il est situé sur cette même droite à une distance a du premier, mais avec cette condition que l'évaluation de la distance n'est qu'approchée, et on sait qu'elle peut différer en plus ou en moins de la véritable, de la quantité e.

Il suit de là qu'ayant pris sur la droite un point B tel que $AB = a$, et ayant, à droite et à gauche de B, porté $BC = BC' = e$, on sera assuré que l'extrémité de la véritable longueur devra tomber en un point quelconque de la distance CC'. Mais il est évident qu'au point de vue géométrique, ceci correspond à l'indétermination la plus simple dans laquelle on puisse se trouver relativement à la position du point qui nous occupe. Une indétermination beaucoup plus grande serait celle dans laquelle on dirait que ce point doit se trouver à une distance E de B, comptée non-seulement dans le sens de la ligne AB, mais encore dans toutes les directions rayonnant autour du point B dans le plan de la figure.

Dans ce cas, ayant décrit, avec E pour rayon et du point B comme centre, une circonférence, l'extrémité de la ligne résolvant le problème devrait se trouver en l'un quelconque des points de l'espace que cette circonférence circonscrit.

Or à cette nouvelle indétermination dans la position du

(*) Il y a des questions où il s'agit de chercher non pas précisément la valeur de telle quantité, mais de savoir si elle peut exister ou non. Alors il faut que la réalité ou l'imaginarité soient établies avec *certitude* et non approximativement; et la difficulté des *coefficients approchés* reste dans son entier. TM.

point, indétermination que j'appellerais volontiers à deux dimensions, correspondent aussi deux éléments d'incertitude pour le résultat qu'on veut réaliser; car non-seulement ce qui concerne la longueur de la droite manquera de précision, mais il en sera de même pour sa direction qui, au lieu d'être fixe et unique comme dans le cas précédent, pourra être indistinctement une quelconque de celles comprises dans l'angle que forment les deux tangentes menées du point A au petit cercle, images physiques du degré et de la nature de l'approximation introduite dans la question.

On est ainsi invinciblement conduit à reconnaître que dans ce cas il faudra, eu égard au degré et à la nature de cette approximation, accepter comme solution du problème une droite dont non-seulement la longueur ne sera pas certaine, mais dont la direction sera elle-même indécise; d'ailleurs, ainsi que ce doit être le propre de toute approximation, l'erreur sera d'autant moindre pour chacun de ces éléments, que la quantité E sera plus petite par rapport à a, puisque, d'une part, le rapport $\frac{a+e}{a}$ de la véritable longueur à celle approchée, et que, d'autre part, la limite des variations des angles se rapprochent d'autant plus, le premier de l'unité, la seconde de zéro, que E est plus petit.

Si maintenant il arrivait que toutes les solutions géométriques approchées qui correspondent à des droites situées en dehors de la ligne AB pussent être algébriquement représentées au point de vue complexe de leur longueur et de leur direction par la forme imaginaire

$$a + b\sqrt{-1},$$

tandis que celles qui restent sur la ligne AB le sont par du réel, il est évident que le rapprochement des unes et des autres, rapprochement que la figure ci-jointe rend si frappant en Géométrie, et, par suite, l'équivalence du réel et de l'imaginaire, subordonnée d'ailleurs au degré d'approximation adopté, présenterait l'accord le plus complet, le plus satisfaisant, entre la pratique et la théorie.

Là est le véritable nœud qu'il faut délier pour débarrasser la question de toutes ses entraves. Admettez ce principe théorique de l'interprétation des formes imaginaires, supposez que la forme $a + b\sqrt{-1}$ est en effet la représentation analytique des deux éléments de la droite, longueur et direction, combinés ensemble et qui, désormais, marcheraient ainsi associés en Algèbre, comme ils le font en Géométrie, et non-seulement toutes les difficultés disparaissent, mais vous arrivez à une admirable concordance entre les faits analytiques et les faits d'application. Or ce principe, ainsi que je crois l'avoir démontré dans l'ouvrage cité, est précisément la conséquence la plus nécessaire de l'interprétation que j'ai donnée de l'expression $\sqrt{-1}$. Mais, par les raisons ci-dessus développées, je dois m'abstenir d'entrer plus avant dans les détails d'un point d'analyse qui, selon toute apparence, n'a pas encore été admis au droit de bourgeoisie dans le domaine des discussions mathématiques.

F. Vallès,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées,
à Laon (Aisne).

Note du rédacteur. Homère applique à Jupiter l'épithète Νεφεληγερέτης, assembleur de nuages. Ce Jupiter n'est pas le dieu des géomètres. Cette théorie des imaginaires, quant aux *directions*, encore fort nébuleuse, ne semble consister que dans le théorème de Cotes et dans un théorème de statique, *mnémonisés :*

$$R^2 = (P + Q\sqrt{-1})(P - Q\sqrt{-1});$$

P et Q peuvent représenter des forces rectangulaires et R la résultante. Cette exégèse n'a pas, que je sache, fait découvrir des vérités nouvelles. Dût-on y parvenir, on ne les admettra que lorsqu'elles seront contrôlées par une autre voie. Du reste, il ne faut rien repousser systématiquement et surtout les idées qui préoccupent des esprits distingués. *Omnia autem probate: quod bonum est tenete* (Thessal. V, 21).

M. Cauchy a essayé de présenter cette théorie sous une autre forme sous le nom de *quantités géométriques*, mettant à profit les idées de M. Saint-Venant sur les sommes géométriques (*Comptes rendus*, tome XXIX, p. 250), idées reproduites par M. Bellavitis sous le nom d'*équipollences*. Il me semble que c'est toujours de la statique *parlée*. Du reste nous avons là-dessus un travail de M. de Polignac, officier d'artillerie, maintenant en Crimée. Nous nous proposons de le publier, *Deo volente*, en 1855.

Déterminants; correction essentielle.

Le théorème VI (t. XI, p. 437) n'est vrai que pour les puissances des déterminants symétriques et non pour des produits quelconques. *Lisez* $\lambda_1^3 \lambda_2^3$ *au lieu de* $\lambda_1^3 + \lambda_2^3$ (p. 440).

Dans le Mémoire de Jacobi (t. X, p. 258), il s'est glissé plusieurs fautes d'accentuation que le lecteur corrigera facilement.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME XIII).

Analyse algébrique.

Analyse indéterminée; Arithmologie et Arithmétique.

Déterminants.

Géométrie élémentaire.

Géométrie segmentaire.

Géométrie descriptive.

Trigonométrie plane et sphérique; Polygonométrie.

Géométrie dans l'espace; lignes et surfaces.

Méthodes métamorphiques, géométriques et analytiques.

Géométrie des lignes planes.

Coniques planes.

Géométrie pratique.

Géométrie de situation.

Mécanique.

Calcul infinitésimal; séries.

Calcul aux différences finies.

Physique mathématique; Astronomie.

Questions proposées.

Questions résolues.

Bibliographie et Biographie.

Mélanges.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(Les noms des Auteurs d'articles sont précédés d'un astérisque.)

QUESTIONS NON RÉSOLUES

Dans les treize premiers volumes.

Nos.	Pages.
TOME II.	
61	48
TOME IV.	
93	259
TOME V.	
120	202
TOME VII.	
190	240
192	368
193	*Ibid.*
TOME VIII.	
199	44
TOME X.	
240	357
245	358
TOME XI.	
251 (échec)	115
252 (domino)	*Ibid.*
266	401
TOME XII.	
270	99
280	327
281	*Ibid.*
TOME XIII.	
288	191
289	192
294	314

Observation. Sur 295 questions, il en reste 18 à résoudre. Les autres sont résolues et imprimées, ou bien en manuscrit, et paraîtront en 1855.

ERRATA.

Page 134, lignes 7 et 8 en remont., *au lieu de* $\frac{d(\alpha-\omega)}{\rho\, d\mathrm{R}}$, *lisez* $\frac{\rho\, d\mathrm{R}}{d(\alpha-\omega)}$.

135, ligne 11 en remontant, *au lieu de* $\beta\omega$, *lisez* $\beta-\omega$.

192, ligne 9 en descendant, *au lieu de* 3^{m+r}, *lisez* 3^{m+4r}.

222, ligne 14 en descendant, *au lieu de* ostendant, *lisez* ostendunt.

222, ligne 14 en descendant, *au lieu de* quia, *lisez* quin.

222, ligne 20 en descendant, *au lieu de* indigistati, *lisez* indigitasti.

288, ligne 1 en descendant, *au lieu de* æquationes, *lisez* æquationis.

330, ligne 11 en descendant, *au lieu de* $\frac{3}{2}(\mathrm{C}-\mathrm{J})$, *lisez* $\frac{2}{3}(\mathrm{C}-\mathrm{J})$.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.